

Expansión del determinante por cofactores

18 de septiembre de 2026

Expansión por cofactores (por fila o columna)

Fórmula de permutaciones

- ▶ Fórmula de permutaciones:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \boxed{a_{1,\sigma(1)}} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

- ▶ En cada término aparece $a_{1,\sigma(1)}$.
- ▶ Agrupando por $\sigma(1) = j$:

$$\det A = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{1j} \left(\sum_{\sigma(1)=j} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}}_{\text{qué es esto???}} \right).$$

Qué calcula $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$?

- ▶ $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \pm \det A_{1j}$.
- ▶ A_{1j} = matriz $(n-1) \times (n-1)$ que queda quitando fila 1, columna j .

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

- ▶ ... salvo el signo:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = (-1)^{j+1} \det A_{1j}.$$

Expansión por primera fila

$$\det A = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{1j} (-1)^{j+1} \det A_{1j}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Expansión por primera fila: ejemplo

$$\det A = +a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=-2} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}_{=-8} + 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} = -4.$$

Para cualquier fila i o columna j

- Cofactores:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

- Para fila fija i :

$$\det A = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

- $\det A^t = \det A \implies$ fórmula similar para columna fija j ,

$$\det A = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Expansión por primera columna: ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=-2} - 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=0} + 8 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=1} = -4.$$

Matriz adjunta

Matriz adjunta

$\text{adj } A = (C_{ji})$ = transpuesta de matriz de cofactores (C_{ij}) .

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Matriz adjunta: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, & C_{12} &= - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8, & C_{13} &= + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ C_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, & C_{22} &= + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8, & C_{23} &= - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\ C_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, & C_{32} &= - \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, & C_{33} &= + \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Matriz adjunta: ejemplo

$$\begin{aligned}C_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, & C_{12} &= - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8, & C_{13} &= + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\C_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, & C_{22} &= + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8, & C_{23} &= - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\C_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, & C_{32} &= - \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, & C_{33} &= + \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2.\end{aligned}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & -10 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriz adjunta y determinante

- ▶ Calculemos el producto $A \cdot \text{adj } A$.
- ▶ $A = (a_{ij})$, $\text{adj } A = (C_{ji}) = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})$.
- ▶ La entrada (i, k) del producto $A \cdot \text{adj } A$:

$$\sum_j a_{ij} C_{kj} = \sum_j a_{ij} (-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

- ▶ Si $k = i$, es la fórmula para $\det A$.
- ▶ Si $k \neq i$, es la fórmula para $\det B$, donde B es A con copia de fila i en lugar de fila k . Filas coinciden $\implies \det B = 0$.
- ▶ Conclusión: $A \cdot \text{adj } A = \det A \cdot I$

Matriz adjunta y determinante: ejemplo

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot I.$$

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & -10 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Matriz adjunta y la inversa

- ▶ A invertible $\iff \det A \neq 0$.
- ▶ $A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot I \implies \frac{1}{\det A} A \cdot \operatorname{adj} A = A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \right) = I$.
- ▶ Conclusión: cuando $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

- ▶ Nota: en práctica, A^{-1} se calcula con Gauss–Jordan.

Matriz adjunta y la inversa: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{adj } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & -10 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -4.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \text{adj } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -2 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Regla de Cramer (curiosidad histórica)

Ecuación matricial

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \quad \quad \cdots, \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$A\mathbf{x} = b \implies \mathbf{x} = A^{-1} b.$$

Regla de Cramer

$$A\mathbf{x} = b \implies x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

A_i = reemplazar la columna i en A por b .

Regla de Cramer: ejemplo

$$\begin{cases} 6x + y + 2z = 1, \\ 4x + y + 3z = 1, \\ 8x + 2y + 4z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$x_1 = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Regla de Cramer: demostración

$$\blacktriangleright \mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}.$$

$$\blacktriangleright A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

$$\blacktriangleright \mathbf{x} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A) \mathbf{b}.$$

$$\blacktriangleright \operatorname{adj} A = (C_{ji}).$$

$$\blacktriangleright x_i = \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_j b_j C_{ji}}_{=\det A_i} = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Conclusión

Determinantes

- ▶ A matriz cuadrada de $n \times n$.
- ▶ $\det A$: número asociado a A .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Cálculos con eliminación

► Caso triangular:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ * & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{triangular inferior}} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{triangular superior}} = \underbrace{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}_{\text{entradas diagonales}} .$$

► Operaciones elementales con filas (columnas):

- $F_i \rightarrow F_i + cF_j$: no afecta det.
- $F_i \leftrightarrow F_j$: cambia signo de det.
- $F_i \rightarrow cF_i$: multiplica det por c .

Fórmulas

- ▶ $\sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$: fórmula grande con $n!$ términos.
- ▶ Expansión por fila i :

$$\det A = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

- ▶ Expansión por columna j :

$$\det A = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Propiedades clave

- ▶ $\det AB = \det A \det B$: compatible con producto de matrices.
- ▶ $\det(A^t) = \det A$: filas y columnas se pueden intercambiar
cuando hablamos de determinantes.

Importancia de determinante

- ▶ $\det A \neq 0 \iff A$ invertible $\iff Ax = b$ tiene solución única.
- ▶ $\det A =$ volumen orientado del «hiperparalelepípedo» que corresponde a las filas (o columnas) de A .