

15 de septiembre de 2026

Cálculo 1. Parcial 1: Funciones y límites. Soluciones

Pregunta 1 [1pt]. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ calcule las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución. Vamos a recordar la definición:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x));$$

es decir, para calcular $g \circ f$, hay que sustituir la expresión para $f(x)$ en lugar de x en la expresión para $g(x)$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1)^2 + (x + 1) + 1} = \\ &= \sqrt{(x^4 + 2x^2 + 1) + (x + 1) + 1} = \sqrt{x^4 + 2x^2 + x + 3}.\end{aligned}$$

Para $f \circ g$, tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

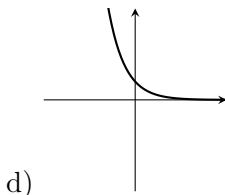
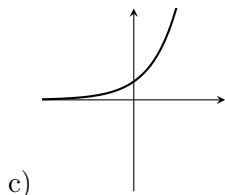
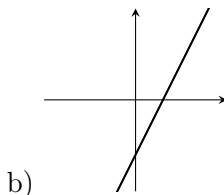
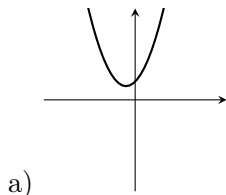
aquí la expresión para $g(x)$ se sustituye en lugar de x en la expresión para $f(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 + x + 1}) = (\sqrt{x^2 + x + 1})^2 + 1 = (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2.$$

Para simplificar el resultado, usamos que $(\sqrt{a})^2 = a$ (cuando $a \geq 0$ y la raíz cuadrada está definida).

Pregunta 2 [1pt]. Relacione las siguientes funciones con su respectiva gráfica:

1) $f(x) = 2x - 3$, 2) $f(x) = x^2 + x + 1$, 3) $f(x) = (1/3)^x$, 4) $f(x) = 2^x$.



Solución. La primera función $f(x) = 2x - 3$ es una **función lineal**, su gráfica es una recta (línea, de allí el nombre «lineal»). Entonces, la respuesta es b). En general, una función lineal tiene la forma $f(x) = ax + b$ para algunos números a y b , y su gráfica es una recta.

La segunda función $f(x) = x^2 + x + 1$ es una **función polinomial de grado 2**, o también se dice que es una función **cuadrática**, por el grado 2. En general, una función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son algunos números y $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola. La respuesta es a).

La tercera y la cuarta función $f_3(x) = (1/3)^x$, $f_4(x) = 2^x$ son **funciones exponenciales**. Recordemos que en general, una función exponencial tiene la forma $f(x) = b^x$, donde $b > 0$ es un número fijo.

Si $0 < b < 1$, la función $f(x) = b^x$ es **decreciente**: cuando x se hace más grande, el número b^x se hace más pequeño. Por ejemplo,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3, \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1, \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}, \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}, \dots$$

La gráfica de $f(x) = b^x$ con $0 < b < 1$ se ve como la que está dibujada en d).

Por otra parte, si $b > 1$, la función $f(x) = b^x$ es **creciente**: cuando x se hace más grande, el número b^x se hace más grande también. Por ejemplo,

$$2^{-2} = \frac{1}{4}, 2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \dots$$

La gráfica de $f(x) = b^x$ con $b > 1$ se ve como la que está dibujada en c).

Conclusión: 1)–b), 2)–a), 3)–d), 4)–c).

Pregunta 3 [2 pts]. Encuentre la función inversa $f^{-1}(x)$ de cada una de las siguientes funciones:

$$1) f(x) = x, \quad 2) f(x) = 2x + 1, \quad 3) f(x) = 3^x, \quad 4) f(x) = x^3 + 1.$$

Solución. Recordemos la definición de función inversa: f^{-1} debe cumplir con

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

En el caso 1), funciona $f^{-1}(x) = x$:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) = x, \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

En el caso 2), para encontrar la inversa, nos conviene denotar la variable de f^{-1} por y y escribir $f^{-1}(y)$. Consideremos la ecuación $f(x) = 2x + 1 = y$. Expresando de aquí x en términos de y , se obtiene $x = \frac{y-1}{2}$. Pongamos

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$

Calculamos

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

y también

$$f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = (y-1) + 1 = y.$$

Esto verifica que la función $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ es la inversa. Si queremos, también podemos escribir $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, la variable de una función puede ser cualquier letra.

En el caso 3), la función inversa para $f(x) = 3^x$ es el logaritmo correspondiente

$$f^{-1}(x) = \log_3(x).$$

Esta es la definición del logaritmo, que es una función especial que se introduce precisamente para invertir la función exponencial.

La inversa de $f(x) = b^x$ es $f^{-1}(x) = \log_b(x)$ para cualquier base $b > 0$, $b \neq 1$. Descifrando la definición de la función inversa, esto quiere decir que

$$\log_b(b^x) = x, \quad b^{\log_b(x)} = x,$$

suponiendo $x > 0$ en la segunda identidad.

En el caso 4), podemos proceder como en 2) y escribir la ecuación $f(x) = x^3 + 1 = y$. De aquí $x = \sqrt[3]{y-1}$. Así la función inversa debe ser

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}.$$

Lo podemos comprobar:

$$f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt[3]{y-1}) = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = (y-1) + 1 = y$$

y también

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3 + 1) = \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Pregunta 4 [2 pts]. Una ciudad tiene 10,000 habitantes y su población aumenta un 3 % cada año. ¿En cuántos años la población alcanzará 1,000,000? (Use la calculadora.)

Solución. Esta pregunta es de la Tarea 2, donde se ven problemas muy similares sobre los logaritmos, y en clase vimos un ejercicio similar sobre el crecimiento de bacterias.

Nos conviene poner que el año actual es $t = 0$, y la población es

$$N(0) = 10000 = 10^4.$$

Denotemos por $N(t)$ la población en el momento t , donde t se mide en años a partir de $t = 0$.

Al pasar un año, la población aumenta un 3 %, y esta será

$$N(1) = 10^4 \cdot 1,03.$$

De la misma manera,

$$N(2) = N(1) \cdot 1,03 = 10^4 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 10^4 \cdot 1,03^2,$$

luego

$$N(3) = N(2) \cdot 1,03 = 10^4 \cdot 1,03^3,$$

etc.

En general, la ecuación es

$$N(t) = 10^4 \cdot 1,03^t.$$

Queremos encontrar t cuando $N(t) = 1000000 = 10^6$; es decir, resolver

$$10^6 = 10^4 \cdot 1,03^t.$$

Podemos tomar el logaritmo de ambos lados de la ecuación. La base de logaritmo es irrelevante, pero aquí aparecen potencias de 10, y por lo tanto nos conviene tomar el logaritmo de base 10:

$$\log_{10}(10^6) = \log_{10}(10^4 \cdot 1,03^t).$$

El logaritmo tiene las siguientes propiedades notables:

$$\begin{aligned}\log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y), \\ \log_b(x^c) &= c \log_b(x).\end{aligned}$$

Gracias a esto, nuestra ecuación se convierte en

$$\log_{10}(10^6) = \log_{10}(10^4) + t \log_{10}(1,03).$$

Por la definición del logaritmo, sabemos que $\log_{10}(10^6) = 6$ y $\log_{10}(10^4) = 4$. Para calcular $\log_{10}(1,03)$, nos sirve la calculadora:

$$\log_{10}(1,03) = 0,0128372 \dots$$

Esto tiene sentido: se tiene $\log_b(1) = 0$ para cualquier base b , y nuestro número 1,03 está muy cerca de 1, así que $\log_{10}(1,03)$ es un poco mayor que 0.

Sustituyendo los logaritmos, nos queda $6 = 4 + 0,0128372 \cdot t$, es decir,

$$2 = 0,0128372 \cdot t.$$

Esta es una ecuación lineal que sí sabemos resolver:

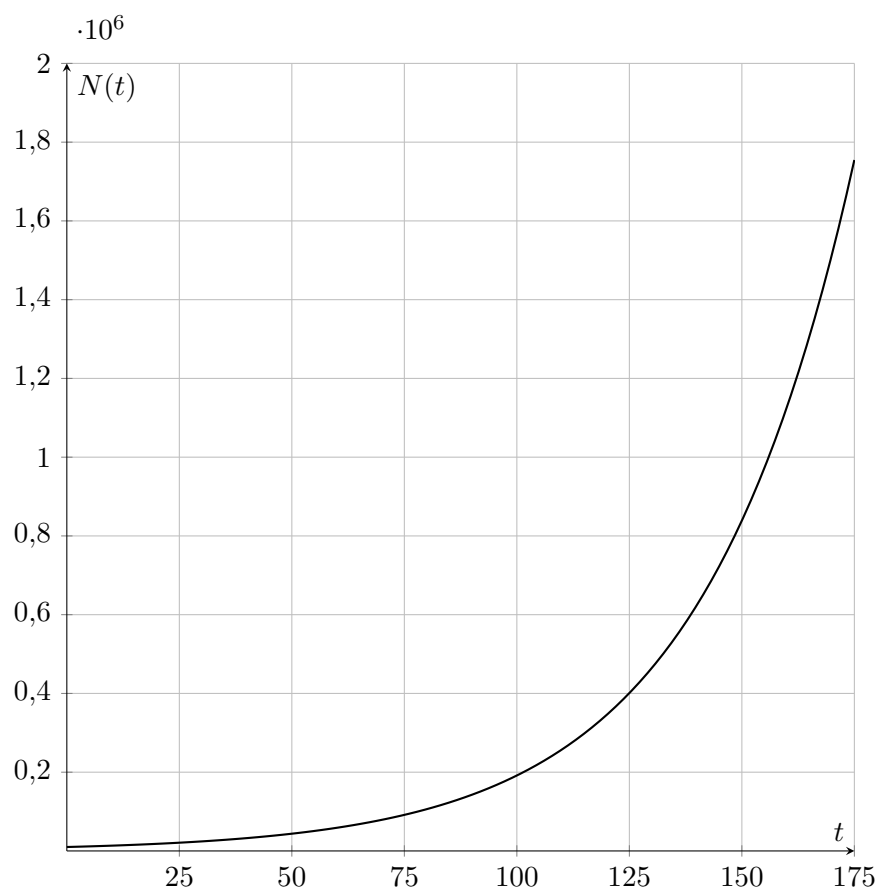
$$t = \frac{2}{0,0128372} \approx 155,79.$$

Para comprobarlo, calculamos

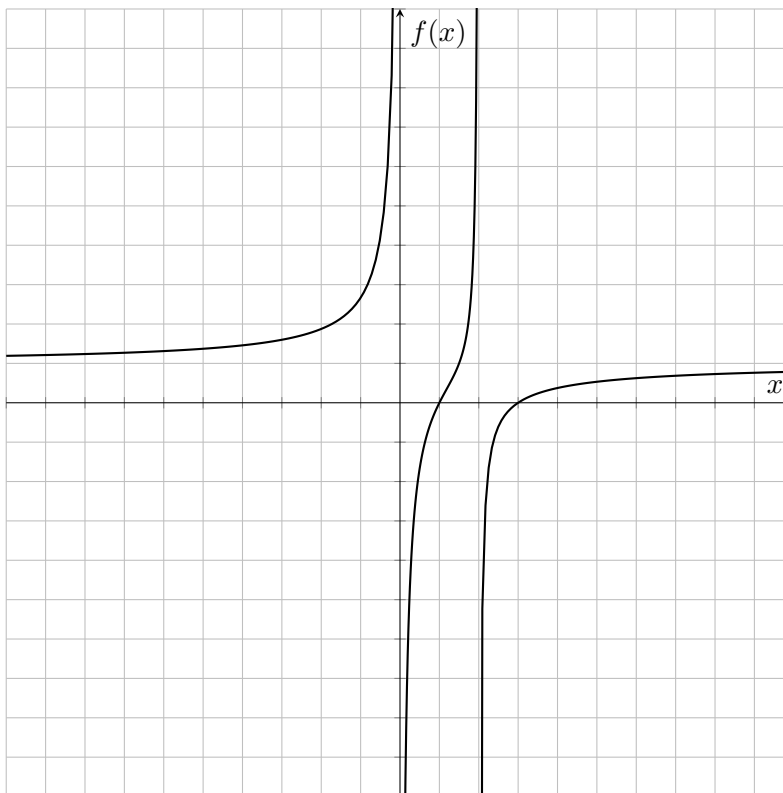
$$\begin{aligned} N(155) &= 10^4 \cdot 1,03^{155} \approx 976719, \\ N(156) &= 10^4 \cdot 1,03^{156} \approx 1006021. \end{aligned}$$

La respuesta es 156 años.

Así se ve la gráfica de nuestra función $N(t)$:



Pregunta 5 [2 pts]. Encuentre las asíntotas verticales de la función racional $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}$. Indique dónde se cumple $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$. He aquí la gráfica de la función:



Solución. Vamos a recordar que por la definición, $x = a$ es una asíntota vertical para $f(x)$ si

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty;$$

es decir, si se cumple una de las cuatro condiciones:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$: los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente negativos cuando nos acercamos a a por la izquierda;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$: los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes cuando nos acercamos a a por la izquierda;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$: los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente negativos cuando nos acercamos a a por la derecha;
- 4) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$: los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes cuando nos acercamos a a por la derecha.

Hemos visto que cualquier función racional $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios, es continua en todo punto a donde la función está definida; es decir, donde $h(a) \neq 0$. Esto quiere decir que para cualquier a donde $h(a) \neq 0$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

y en particular, el límite existe.

Para encontrar las asíntotas verticales, nos interesan las situaciones donde el límite *no existe*. Para $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ esto puede pasar en los puntos a donde $h(a) = 0$.

En nuestro caso, $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}$. El denominador se hace 0 cuando $x = 0$ o $x = 2$. En estos puntos queremos investigar los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}.$$

Para el primer límite $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}$, si tomamos los números cercanos a 0, pero ligeramente menores, entonces $x-1 < 0$, $x-3 < 0$, $x < 0$, $x-2 < 0$. Así que $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)} > 0$, los valores de la función son números positivos. Mientras x se hace más cercano a 0, los valores de $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}$ se hacen arbitrariamente grandes, y se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

Para el segundo límite, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}$, hay que tomar los números cercanos a 0, pero ligeramente mayores. En este caso $x-1 < 0$, $x-3 < 0$, $x > 0$, $x-2 < 0$, y por lo tanto $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)} < 0$. Esto quiere decir que al acercarnos a 0 por la derecha, los valores de $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}$ se hacen arbitrariamente negativos, así que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Los límites en $a = 2$ se analizan de manera similar: tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

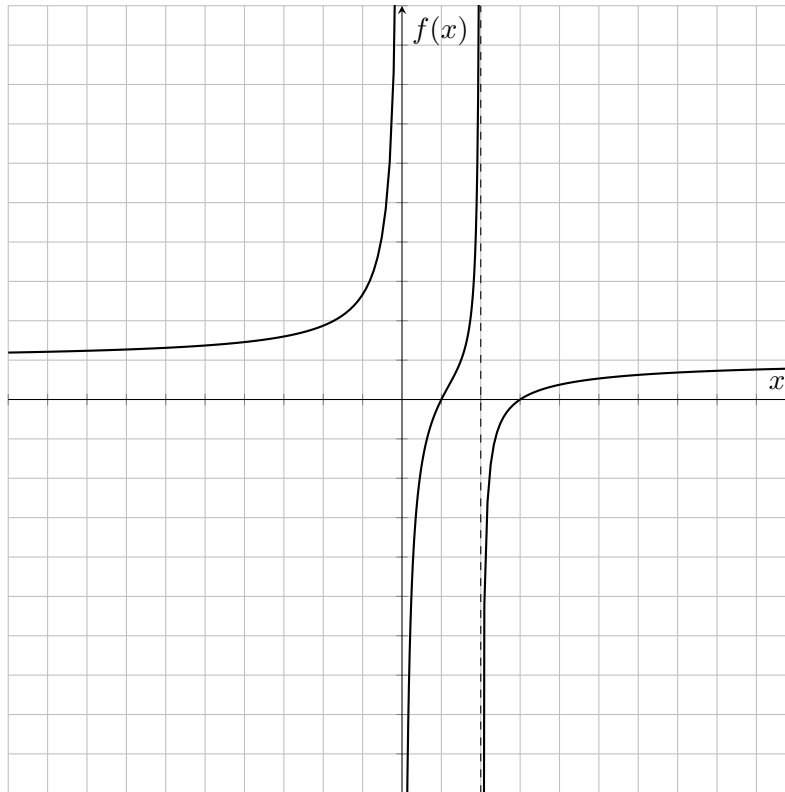
Entonces, la respuesta es:

- las asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = 2$,

- en estos puntos se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

Esto se puede ver directamente en la gráfica analizando qué sucede con $f(x)$ cuando x se acerca a 0 o 2 por la izquierda o por la derecha.



Pregunta 6 [2 pts]. Calcule los límites

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{3x^2 + 4x + 1}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x(x+2)} \right)^2, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}.$$

Solución. Para el primer límite, recordemos que:

- $g(x) = 3x^2 + 4x + 1$, al igual que cualquier polinomio, es una función continua, lo cual significa que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ para cualquier a ; es decir, el límite es el valor de $f(x)$ en $x = a$,
- $h(x) = \sqrt[3]{x}$ es también una función continua,
- $f(x) = (h \circ g)(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4x + 1}$ es una función continua, siendo la composición de dos funciones continuas.

Entonces, en 1), es suficiente sustituir $x = 1$ para encontrar el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{3x^2 + 4x + 1} = \sqrt[3]{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Los límites 2), 3), 4) son más interesantes porque tienen la forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, donde la función $f(x)$ no está definida en $x = a$, así que no se puede aplicar la sustitución directa.

En 2), nos interesa el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x(x+2)} \right)^2.$$

Para calcularlo, nos sirve saber que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Luego, vamos a recordar la siguiente propiedad:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ suponiendo que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ existen.}$$

Y como consecuencia de esto, para cualquier potencia $n = 2, 3, 4, \dots$,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^n) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n, \text{ suponiendo que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe.}$$

Ahora,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x(x+2)} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(x+2)} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} \right)^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

En 3), nos sirve la siguiente propiedad: si tenemos $f(x) = g(x)$ cerca de a , pero no necesariamente en a , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Aquí tenemos

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

para $x > 0$, $x \neq 4$. Entonces, cerca de 4, se tiene $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$, así

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Aquí en el último paso usamos que $\frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ es una función continua en cualquier punto donde está definida, siendo una composición de funciones continuas, así que es válido calcular su límite substituyendo $x = 4$.

En 4), la idea es la misma. Para calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2},$$

podemos factorizar $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, y luego

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3.$$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{3x^2 + 4x + 1} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x(x + 2)} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3.$$

A continuación vamos a graficar las funciones cerca de a para visualizar nuestros resultados obtenidos con manipulaciones algebraicas.

