

Cálculo 1

Semana 2: Funciones logarítmicas. Soluciones

25 de agosto de 2026

0. Determine cuáles de las siguientes funciones entre conjuntos finitos son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Describa la función inversa f^{-1} , cuando esta existe.

- 1) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = a$;
- 2) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = b$;
- 3) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ definida por $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = a$;
- 4) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$ definida por $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = c$.

Véase también el último ejercicio de la tarea 1 que revisa la biyectividad y funciones inversas para funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aquí consideramos $f: X \rightarrow Y$ con X e Y conjuntos finitos.

Solución. Recordemos que una función $f: X \rightarrow Y$ es:

- **inyectiva** cuando, si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- **sobreyectiva** cuando para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$,
- **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Para una función biyectiva $f: X \rightarrow Y$ se puede definir la **inversa** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ de la siguiente manera: si $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$. Aquí la biyectividad es necesaria para garantizar que para cada y exista un x tal que $f(x) = y$ e, además, que este x sea único. Se cumple $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $x \in X$, $y \in Y$.

Para las funciones en cuestión:

- 1) f no es inyectiva porque $f(1) = f(3)$ y tampoco es sobreyectiva porque b no está entre los valores de f .

- 2) f es inyectiva y sobreyectiva, así que es biyectiva. Su inversa $f^{-1}: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ será

$$f^{-1}(a) = 1, \quad f^{-1}(b) = 3, \quad f^{-1}(c) = 2.$$

- 3) f es inyectiva, pero no es sobreyectiva: nos falta el valor d .

- 4) f es sobreyectiva, pero no es inyectiva porque $f(2) = f(4)$.

Se deja al lector probar que si $f: X \rightarrow Y$ es una función entre conjuntos finitos *que tienen el mismo número de elementos* como en el caso 1) y 2), entonces una función inyectiva (resp. sobreyectiva) es automáticamente sobreyectiva (resp. inyectiva).

Este ejercicio sirve para repasar la definición de biyectividad. La función exponencial

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty), \\ x &\mapsto b^x \end{aligned}$$

para $b > 0$, $b \neq 1$ es biyectiva, y por lo tanto tiene función inversa, que se denomina el logaritmo de base b :

$$\begin{aligned} f^{-1}: (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \log_b(x). \end{aligned}$$

En los siguientes ejercicios, use la calculadora.

1. La población de una ciudad M es de 100,000 habitantes. Se proyecta que cada año aumentará en un 2 %. ¿En cuánto tiempo la población alcanzará 1,000,000 de habitantes?

Solución. Si la población inicial es P_0 y aumenta un 2 % cada año, entonces el primer año habrá $1,02 P_0$ habitantes, el segundo año habrá $1,02 \cdot (1,02 P_0) = (1,02)^2 P_0$ habitantes, el tercer año habrá $(1,02)^3 P_0$ habitantes, etc. La función del número de habitantes es

$$P(t) = (1,02)^t P_0,$$

donde t es el tiempo en años. Queremos resolver la ecuación

$$1000000 = (1,02)^t 100000.$$

Para encontrar t , nos conviene tomar los logaritmos. Funcionaría cualquier base de logaritmo, pero para los números 100000 y 1000000 nos conviene $\log_{10}$. Tenemos

$$\log_{10}(1000000) = \log_{10}((1,02)^t 100000).$$

El logaritmo de producto es la suma de logaritmos: $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$, así podemos reescribir la ecuación como

$$\log_{10}(1000000) = \log_{10}((1,02)^t) + \log_{10}(100000).$$

Además, tenemos $\log_b(x^t) = t \log_b(x)$, así que la ecuación se vuelve

$$\log_{10}(1000000) = t \log_{10}(1,02) + \log_{10}(100000).$$

Esta es una ecuación lineal en t , solo nos falta calcular los logaritmos:

$$\log_{10}(1000000) = \log_{10}(10^6) = 6,$$

$$\log_{10}(100000) = \log_{10}(10^5) = 5,$$

$$\log_{10}(1,02) \approx 0,0086$$

—aquí los primeros dos números salen de la definición de $\log_{10}$, y el último se obtiene usando la calculadora. Entonces, nos queda

$$6 = 0,0086 t + 5,$$

de donde

$$t = \frac{6 - 5}{0,0086} \approx 116,27.$$

Si queremos, podemos redondear este número y decir que la población alcanzará 1,000,000 al cabo de 117 años.

Para comprobar la respuesta: la calculadora nos da (redondeando a un número entero)

$$(1,02)^{116} 10^5 = 994534,$$

$$(1,02)^{117} 10^5 = 1014425.$$

La moraleja de este ejercicio: usando logaritmos, una ecuación donde t aparece en el exponente se convierte en una ecuación lineal en t .

2. La población de otra ciudad N es de 50,000 habitantes. Se proyecta que cada año disminuirá en un 5 %. ¿En cuánto tiempo la población se reducirá a 1,000 habitantes?

Solución. Este ejercicio es similar al anterior, pero, en lugar de sumar un 2 % cada año, vamos a restar un 5 %; es decir, multiplicar la población por 0,95. Tenemos

$$P(t) = (0,95)^t P_0,$$

donde $P_0 = 50000$ y queremos encontrar t tal que $P(t) = 1000$. Escribamos la ecuación:

$$1000 = (0,95)^t 50000.$$

De nuevo, se pueden tomar los logaritmos (podemos usar cualquier base de logaritmo, por ejemplo 10):

$$\log_{10}(1000) = t \log_{10}(0,95) + \log_{10}(50000).$$

Calculamos los logaritmos:

$$\begin{aligned}\log_{10}(1000) &= 3, \\ \log_{10}(0,95) &\approx -0,022276, \\ \log_{10}(50000) &\approx 4,69897.\end{aligned}$$

Nos queda una ecuación lineal:

$$3 = -t 0,022276 + 4,69897,$$

de donde

$$t = \frac{4,69897 - 3}{0,022276} \approx 76,26.$$

Por lo tanto, la población será inferior a 1 000 habitantes por primera vez después de 77 años. Podemos comprobar los cálculos:

$$\begin{aligned}(0,95)^{76} \cdot 50\,000 &= 1013, \\ (0,95)^{77} \cdot 50\,000 &= 963.\end{aligned}$$

3. Hay dos opciones: recibir 1,000,000 de pesos una vez, o recibir durante un mes el primer día 5 centavos, luego 10 centavos, 20 centavos, 40 centavos, etc., duplicando la cantidad hasta el fin del mes. ¿Qué conviene más?

Solución. Si $N(t)$ es la cantidad de dinero que se recibe el día t , donde $t = 1, 2, 3, \dots$, la fórmula sería

$$N(t) = 0,05 \cdot 2^{t-1}.$$

El mes puede tener 28, 29, 30 o 31 días, pero esto es irrelevante porque para $t = 28$ ya se recibe

$$N(28) = 0,05 \cdot 2^{27} = 6710886,4.$$

La cantidad total será

$$N(1) + N(2) + N(3) + N(4) + \dots$$

que es mucho más de 1,000,000, como acabamos de ver. Entonces, conviene elegir la segunda propuesta.

Este ejercicio nos enseña que la función exponencial a^t para $a > 1$ crece muy rápido.

4. Del ejercicio anterior, calcule cuántos días habrá que esperar para recibir 1,000,000,000 de pesos.

Solución. Queremos resolver la ecuación

$$10^9 = 0,05 \, 2^{t-1}.$$

Como en los ejercicios anteriores, los logaritmos ayudan a resolverla. Nos conviene usar el logaritmo de base 2 para simplificar los cálculos:

$$\log_2(10^9) = \log_2(0,05 \, 2^{t-1}).$$

Usando las leyes de logaritmos, esto se reescribe como

$$9 \log_2(10) = \log_2(0,05) + (t - 1).$$

De aquí,

$$t = 9 \log_2(10) - \log_2(0,05) + 1 \approx 9 \cdot 3,32 + 4,32 + 1 = 35,2.$$

Podemos concluir el pago supera 1,000,000,000 el día 36. Para comprobar los cálculos:

$$\begin{aligned} 0,05 \cdot 2^{34} &\approx 858\,993\,459, \\ 0,05 \cdot 2^{35} &\approx 1\,717\,986\,918. \end{aligned}$$