

Cálculo 1

Tarea 4: Cálculo de límites y continuidad. Soluciones

8 de septiembre de 2026

Ejercicio 1. Calcule los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\sin(-x)}{x}} - 7, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}. \quad (5)$$

Sugerencia: En algunos casos pueden ser útiles las identidades

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Solución. Como comprobación rápida, las respuestas son: (1) -2 , (2) $\frac{1}{4}$, (3) $-\frac{1}{16}$, (4) $\frac{12}{5}$, (5) -2 .
Para el primer límite,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\sin(-x)}{x}} - 7 = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin(x)}{x} - 7 \right)} = \sqrt[3]{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} - 7} = \sqrt[3]{-1 - 7} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Aquí usamos las siguientes propiedades importantes:

- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, gracias a la continuidad de $\sqrt[n]{x}$,
- el seno es una función impar: $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- el límite notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

El resto de los límites se calculan con manipulaciones algebraicas. En estos ejemplos el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no se puede calcular sustituyendo $x = a$ porque la función $f(x)$ no está definida en a : nos sale $\frac{0}{0}$. Sin embargo, se puede simplificar $f(x)$ y cancelar el factor problemático en el denominador. Cuando este factor desaparece, se puede sustituir $x = a$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x^2 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) - 4}{x^2 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1})(\sqrt{x + 13} + 2\sqrt{x + 1})}{(x^2 - 9)(\sqrt{x + 13} + 2\sqrt{x + 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 13) - 4(x + 1)}{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 13} + 2\sqrt{x + 1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 13} + 2\sqrt{x + 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}(x + 3)(\sqrt{x + 13} + 2\sqrt{x + 1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x + 3)(\sqrt{x + 13} + 2\sqrt{x + 1})} = \\ &= \frac{-3}{(3 + 3)(\sqrt{3 + 13} + 2\sqrt{3 + 1})} = \frac{-3}{6(\sqrt{16} + 2\sqrt{4})} = \frac{-3}{6(4 + 2 \cdot 2)} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9 + 2x} - 5)(\sqrt{9 + 2x} + 5)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{9 + 2x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(9 + 2x) - 25}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{9 + 2x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2x - 16}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{9 + 2x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(x - 8)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{9 + 2x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(\cancel{\sqrt[3]{x} - 2})((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\cancel{\sqrt[3]{x} - 2})(\sqrt{9 + 2x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt{9 + 2x} + 5} = \frac{2((\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4)}{\sqrt{9 + 2 \cdot 8} + 5} = \frac{2(2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{\sqrt{25} + 5} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1 - x} - 3)(\sqrt{1 - x} + 3)}{(2 + \sqrt[3]{x})(\sqrt{1 - x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(1 - x) - 9}{(2 + \sqrt[3]{x})(\sqrt{1 - x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(8 + x)}{(2 + \sqrt[3]{x})(\sqrt{1 - x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(2 + \sqrt[3]{x})(2^2 - 2\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)}{(2 + \sqrt[3]{x})(\sqrt{1 - x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-\cancel{(2 + \sqrt[3]{x})}(2^2 - 2\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)}{\cancel{(2 + \sqrt[3]{x})}(\sqrt{1 - x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(2^2 - 2\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)}{\sqrt{1 - x} + 3} = \\ &= \frac{-(2^2 - 2\sqrt[3]{-8} + (\sqrt[3]{-8})^2)}{\sqrt{1 - (-8)} + 3} = \frac{-(4 - 2 \cdot (-2) + (-2)^2)}{\sqrt{9} + 3} = \frac{-(4 + 4 + 4)}{3 + 3} = -2.\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Determine los intervalos donde cada función es continua:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}, \quad f(x) = \sqrt{x^3+4}, \quad f(x) = \log_2(x-1), \quad f(x) = \sin(2x^2), \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}.$$

Solución. Prácticamente todas las funciones que conocemos: funciones polinomiales, racionales, raíces $\sqrt[n]{x}$, funciones logarítmicas $\log_b(x)$, funciones trigonométricas $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, etc. son continuas donde están definidas, y las composiciones de funciones continuas son también continuas. Así en esta pregunta necesitamos revisar dónde están definidas las funciones.

- $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ es una función racional, definida cuando $x \neq 3$. Es continua en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.
- La función $f(x) = \sqrt{x^3+4}$ está definida cuando $x^3+4 \geq 0$. Resolviendo la desigualdad, se obtiene $x \geq -\sqrt[3]{4}$. La función es continua en $[-\sqrt[3]{4}, +\infty)$.
- La función $f(x) = \log_2(x-1)$ está definida cuando $x-1 > 0$, es decir, cuando $x > 1$. Entonces, es continua en $(1, +\infty)$.
- El seno $\sin(x)$ está definido para cualquier x , así $\sin(2x^2)$ es continuo en $(-\infty, +\infty)$.
- Finalmente, la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ está definida cuando $x+1 \geq 0$ y $x \neq 2$, así que es continua en $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Ejercicio 3. Encuentre el valor de c para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3, \\ c, & x = 3. \end{cases}$$

Solución. Recordemos que $f(x)$ es continua en a cuando

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3 = 6,$$

así que $c = 6$.

Ejercicio 4. Encuentre los valores de a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 1, \\ 3, & x = 1, \\ x^2+a, & x > 1. \end{cases}$$

Solución. Para $x < 1$ la función es lineal: $f(x) = ax+b$ y es continua. Para $x > 1$ es una función cuadrática $f(x) = x^2+a$, y es también continua. Necesitamos asegurarnos de que $f(x)$ sea continua en $f(x)$, para esto se tiene que cumplir

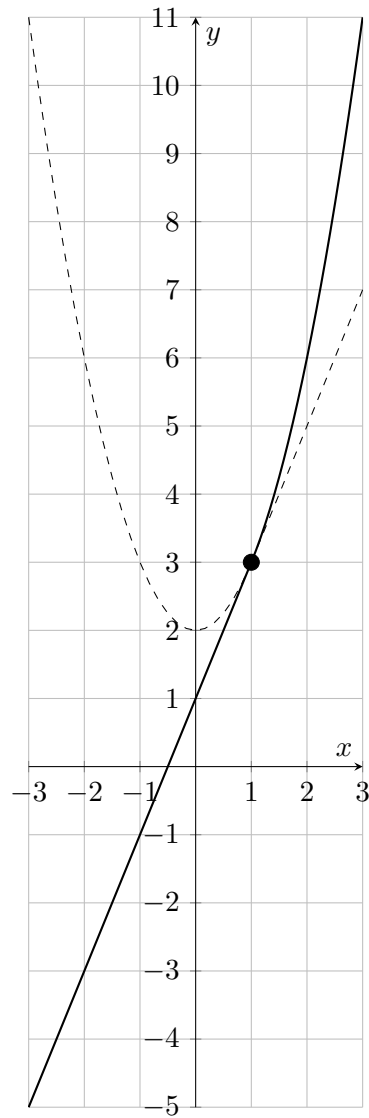
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 3.$$

Ahora

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+a) = 1+a.$$

Las condiciones que tenemos son entonces $a+b = 1+a = 3$, de donde $a = 2$, $b = 1$.

Para visualizar lo que estamos haciendo, para $x < 1$ la gráfica de $ax + b$ es una recta, y para $x > 1$ la gráfica de $x^2 + a$ es una parábola, y estamos buscando los parámetros a y b tales que la recta y la parábola se encuentren en el punto $(1, 3)$.



Ejercicio 5. Para la función polinomial $f(x) = x^2 - 5x + 2$, calcule los valores $f(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y use el teorema del valor intermedio para localizar dos raíces del polinomio x_1, x_2 . Compruebe el resultado resolviendo $f(x) = 0$ con la fórmula del discriminante.

Solución. Calculamos

$$f(0) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = -4, \quad f(3) = -4, \quad f(4) = -2, \quad f(5) = 2.$$

La función $f(x) = x^2 - 5x + 2$ es continua, y $f(x)$ cambia el signo entre 0 y 1, y también entre 4 y 5. Por el teorema del valor intermedio, esto significa que existen $0 < x_1 < 1$ y $4 < x_2 < 5$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Recordemos que para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, las raíces son $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, donde $D = b^2 - 4ac$ es el discriminante. Aquí $D = 17$, y luego

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} = 0,438 \dots, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} = 4,561 \dots$$

Esto coincide con lo que encontramos arriba.