

Cálculo 1

Tarea 5: Derivadas de funciones polinomiales y racionales.

Soluciones

29 de septiembre de 2026

Ejercicio 1. Calcule las derivadas de funciones polinomiales y racionales:

$$f(x) = -4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x + 5, \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 7x + 3}{2}, \quad (2)$$

$$f(x) = x^2(3x^3 - 2x + 1), \quad (3)$$

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)(2x^3 + x - 4), \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x + 2}, \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 1}. \quad (6)$$

Solución. Primero, las respuestas para comprobar los resultados:

$$-20x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3, \quad (1)$$

$$6x^2 - 2x + \frac{7}{2}, \quad (2)$$

$$15x^4 - 6x^2 + 2x, \quad (3)$$

$$10x^4 - 24x^3 + 9x^2 - 14x + 13, \quad (4)$$

$$\frac{15x^2 + 12x - 9}{25x^2 + 20x + 4}, \quad (5)$$

$$\frac{2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 2x - 3}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}. \quad (6)$$

Para calcular la derivada de un polinomio, usamos las propiedades

$$(c)' = 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (cf(x))' = cf'(x), \quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

Entonces, para un polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

la derivada es

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1.$$

En (1),

$$(-4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x + 5)' = (-4x^5)' + (3x^4)' - (2x^3)' + (3x)' = -20x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3.$$

En (2), hay que dividir los coeficientes por 2 (antes o después de sacar las derivadas):

$$\left(\frac{4x^3 - 2x^2 + 7x + 3}{2}\right)' = \left(2x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right)' = 6x^2 - 2x + \frac{7}{2}.$$

En (3) y (4), conviene multiplicar primero los polinomios antes de calcular las derivadas:

$$\begin{aligned} (x^2(3x^3 - 2x + 1))' &= (3x^5 - 2x^3 + x^2)' = 15x^4 - 6x^2 + 2x, \\ ((x^2 - 3x + 1)(2x^3 + x - 4))' &= (2x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 13x + 4)' = 10x^4 - 24x^3 + 9x^2 - 14x + 13. \end{aligned}$$

En (5) y (6) hay que usar la regla de la derivada del cociente de funciones:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

En (5), calculamos

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{5x + 2}\right)' &= \frac{(3x^2 - 2x + 1)'(5x + 2) - (3x^2 - 2x + 1)(5x + 2)'}{(5x + 2)^2} = \\ \frac{(6x - 2)(5x + 2) - 5(3x^2 - 2x + 1)}{(5x + 2)^2} &= \frac{(30x^2 + 2x - 4) - (15x^2 - 10x + 5)}{25x^2 + 20x + 4} = \frac{15x^2 + 12x - 9}{25x^2 + 20x + 4}. \end{aligned}$$

En (6), de manera similar,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 1}\right)' &= \\ \frac{(2x^3 - x^2 - 3x + 2)'(x^2 + 3x - 1) - (2x^3 - x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 1)'}{(x^2 + 3x - 1)^2} &= \\ \frac{(6x^2 - 2x - 3)(x^2 + 3x - 1) - (2x^3 - x^2 - 3x + 2)(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 1)^2} &= \\ \frac{(6x^4 + 16x^3 - 15x^2 - 7x + 3) - (4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 5x + 6)}{(x^2 + 3x - 1)^2} &= \\ \frac{2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 2x - 3}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. La posición de un objeto está dada por $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$, donde t está medido en segundos y s en metros.

- 1) Calcule la función de velocidad $v(t) = s'(t)$.
- 2) Encuentre los instantes donde la velocidad es cero.
- 3) ¿En qué momento la velocidad alcanza 36 m/s?

Solución. Calculamos la derivada

$$v(t) = s'(t) = (2t^3 - 9t^2 + 12t + 1)' = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t^2 - 3t + 2).$$

Luego,

$$v(t) = 0 \iff t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Podemos usar la fórmula del discriminante:

$$at^2 + bt + c = 0 \implies t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ donde } D = b^2 - 4ac.$$

Aquí $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$, y las raíces son $t = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = 1$ y 2 . De hecho,

$$(t - 1)(t - 2) = t^2 - 3t + 2.$$

Entonces, $v(t) = 0$ para $t = 1$ y 2 .

De manera similar se resuelve la ecuación cuadrática

$$v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 36 \iff 6t^2 - 18t - 24 = 0 \iff t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Calculamos $D = 3^2 + 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25$, así que $t = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = -1$ y 4 . Si el tiempo se mide a partir de $t = 0$, podemos quedarnos con la solución $t = 4$.

Ejercicio 3. Para la función $f(x) = x^3 + x^2 - x$:

- 1) calcule la derivada $f'(x)$,
- 2) trace las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$,
- 3) resuelva la desigualdad $f'(x) > 0$,
- 4) analice en la gráfica dónde $f(x)$ crece y decrece.

Solución. Primero, calculamos la derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Para graficar $f'(x)$ y resolver $f'(x) > 0$, nos conviene **completar el cuadrado** de $3x^2 + 2x - 1$. Escribimos

$$3x^2 + 2x - 1 = 3 \left(x^2 + \frac{2}{3}x \right) - 1 = 3 \left(x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) - 1 = 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{3}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 > \frac{4}{3} \iff \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 > \frac{4}{9} \iff \sqrt{\left(x + \frac{1}{3} \right)^2} > \frac{2}{3} \iff \\ &\left| x + \frac{1}{3} \right| > \frac{2}{3} \iff x + \frac{1}{3} < -\frac{2}{3} \text{ o } x + \frac{1}{3} > \frac{2}{3} \iff x < -1 \text{ o } x > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

También podemos resolver directamente la ecuación $3x^2 + 2x - 1 = 0$. Tenemos $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$. Luego, las raíces son

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4}{6} = -1 \text{ y } \frac{1}{3}.$$

Usando

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

escribimos

$$3x^2 + 2x - 1 = 3(x + 1) \left(x - \frac{1}{3} \right).$$

De aquí podemos resolver la desigualdad

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x - 1 > 0 &\iff 3(x + 1) \left(x - \frac{1}{3} \right) > 0 \iff \\ &\left(x + 1 < 0 \text{ y } x - \frac{1}{3} < 0 \right) \text{ o } \left(x + 1 > 0 \text{ y } x - \frac{1}{3} > 0 \right) \iff \\ &x < -1 \text{ o } x > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Como conclusión de nuestros cálculos, tenemos:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	> 0	crece
$(-1, \frac{1}{3})$	< 0	decrece
$(\frac{1}{3}, +\infty)$	> 0	crece

La gráfica de $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{3}$ es una parábola con el punto extremo en $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

Para trazar la gráfica de f , es útil resolver la ecuación

$$f(x) = x^3 + x^2 - x = x(x^2 + x - 1) = 0.$$

Para la ecuación cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$, calculamos el discriminante $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$. Las raíces son $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Aproximadamente, estos números son $\approx -1,62$ y $\approx 0,62$.

Calculamos los valores de $f(x)$ y $f'(x)$ en los x que han salido y en algunos puntos enteros cercanos:

x	$f(x)$	$f'(x)$
-2	-2	7
$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,62$	0	$\approx 3,62$
-1	1	0
$-\frac{1}{3}$	$\approx 0,41$	$\approx -1,33$
0	0	-1
$\frac{1}{3}$	$\approx -0,18$	0
$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,62$	0	$\approx 1,38$
1	1	4
2	10	15

