

Cálculo 1

Tarea 6: Derivadas de funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas. La regla de la cadena. Soluciones

6 de octubre de 2026

Ejercicio 1. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x, \quad (1)$$

$$f(x) = e^x + 5^x - \ln(x), \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x, \quad (3)$$

$$f(x) = \ln(x) + x^2 e^x. \quad (4)$$

$$f(x) = 3 \operatorname{sen}(5x), \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 3}, \quad (6)$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad (7)$$

$$f(x) = e^{x^2} \operatorname{sen}(x^2 + 1), \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad (9)$$

$$f(x) = \log_3(\operatorname{sen}^2 x + 1). \quad (10)$$

Indique las reglas de derivación utilizadas.

Solución. En (1), para calcular la derivada de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x,$$

necesitamos las reglas para la suma/resta y multiplicación por una constante:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (c f(x))' = c f'(x),$$

y también las derivadas del seno y coseno:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Con esto se obtiene:

$$f'(x) = (2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)' = (2 \operatorname{sen} x)' - (3 \cos x)' = 2 (\operatorname{sen} x)' - 3 (\cos x)' = 2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x.$$

En (2), para la derivada de

$$f(x) = e^x + 5^x - \ln(x),$$

de manera similar se aplica la regla para la suma/resta de funciones, y también las fórmulas

$$(e^x)' = e^x, \quad (b^x)' = \ln(b) b^x, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Entonces,

$$f'(x) = (e^x + 5^x - \ln(x))' = (e^x)' + (5^x)' - (\ln(x))' = e^x + \ln(5) 5^x - \frac{1}{x}.$$

En (3), la función es

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x.$$

Este es el producto de dos funciones $g(x) = x^2$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$. La regla de derivación del producto es

$$(g(x) h(x))' = g'(x) h(x) + g(x) h'(x).$$

Para x^2 , recordamos que

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

Entonces,

$$f'(x) = (x^2 \operatorname{sen} x)' = (x^2)' \operatorname{sen} x + x^2 (\operatorname{sen} x)' = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x.$$

En (4), tenemos de manera similar

$$f'(x) = (\ln(x) + x^2 e^x)' = (\ln(x))' + (x^2 e^x)' = \frac{1}{x} + (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = \frac{1}{x} + 2x e^x + x^2 e^x.$$

La función en (5) es

$$f(x) = 3 \operatorname{sen}(5x).$$

Para calcular la derivada de $\operatorname{sen}(5x)$ necesitamos la regla de la cadena:

$$(h(g(x)))' = h'(g(x)) g'(x).$$

En este caso

$$\operatorname{sen}(5x) = h(g(x)), \quad h(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = 5x.$$

Entonces,

$$(\operatorname{sen}(5x))' = (h(g(x)))' = h'(g(x)) g'(x) = \cos(5x) (5x)' = 5 \cos(5x).$$

Así que

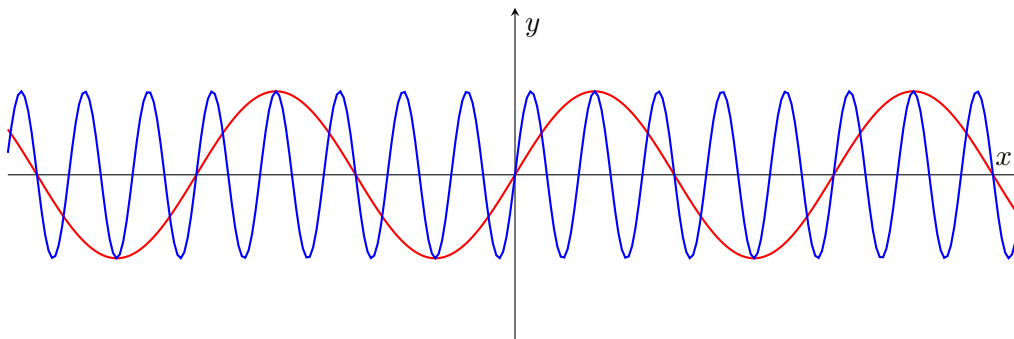
$$f'(x) = (3 \operatorname{sen}(5x))' = 3 \cdot 5 \cos(5x) = 15 \cos(5x).$$

En general, la regla de la cadena implica la siguiente fórmula útil:

$$(f(nx))' = n f'(nx).$$

Es muy natural: para $n > 0$ la gráfica de $f(nx)$ es la gráfica de $f(x)$ comprimida horizontalmente por el factor n (a lo largo del eje x), y se ve que la razón de cambio de los valores se multiplica por n .

Aquí se pueden ver las gráficas de $\sin x$ y $\sin(5x)$:



La derivada de la función (6):

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 3}$$

también se calcula con la regla de la cadena. Escribimos

$$f(x) = h(g(x)), \quad h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x^4 + 3x^2 + 3.$$

Calculamos las derivadas:

$$h'(x) = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 x^{2/3}}, \quad g'(x) = 4x^3 + 6x^2.$$

Entonces,

$$f'(x) = (h(g(x)))' = h'(g(x)) g'(x) = \frac{1}{3 (x^4 + 3x^2 + 3)^{2/3}} (4x^3 + 6x^2) = \frac{4x^3 + 6x^2}{3 (x^4 + 3x^2 + 3)^{2/3}}.$$

En (7) la función es

$$f(x) = \ln(x^2 + 1),$$

su derivada también sale de la regla de la cadena:

$$f(x) = h(g(x)), \quad h(x) = \ln(x), \quad g(x) = x^2 + 1.$$

Calculamos las derivadas:

$$h'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = (x^2 + 1)' = 2x,$$

y luego

$$f'(x) = (h(g(x)))' = h'(g(x)) g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} (2x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

En el inciso (8), tenemos

$$f(x) = e^{x^2} \cdot \text{sen}(x^2 + 1).$$

Este es el producto de dos funciones, así

$$f'(x) = (e^{x^2})' \text{sen}(x^2 + 1) + e^{x^2} \cdot (\text{sen}(x^2 + 1))'.$$

Para calcular las derivadas $(e^{x^2})'$ y $(\text{sen}(x^2 + 1))'$, a cada una necesitamos aplicar la regla de la cadena. En el primer caso,

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x \cdot e^{x^2}.$$

Luego,

$$(\text{sen}(x^2 + 1))' = \cos(x^2 + 1) (x^2 + 1)' = 2x \cos(x^2 + 1).$$

Sustituyendo estas dos derivadas en la expresión para $f'(x)$, obtenemos

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot \text{sen}(x^2 + 1) + e^{x^2} \cdot 2x \cdot \cos(x^2 + 1) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot (\text{sen}(x^2 + 1) + \cos(x^2 + 1)).$$

Para calcular la derivada de la función (9):

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

vamos a usar la fórmula

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Aquí $g(x) = 1 + e^{-x}$, y primero hay que calcular

$$g'(x) = (1 + e^{-x})' = (e^{-x})' = -e^{-x}.$$

Aquí usamos la regla de la cadena, o más bien su caso particular $(f(nx))' = n f'(nx)$ para $n = -1$. Entonces,

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{(-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

En fin, en el caso (10) tenemos

$$f(x) = \log_3(\text{sen}^2(x) + 1).$$

Recordamos que

$$(\log_b(x))' = \frac{1}{\ln(b) x}.$$

Entonces, la regla de cadena nos da

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(3) (\text{sen}^2(x) + 1)} (\text{sen}^2(x) + 1)'.$$

La derivada $(\text{sen}^2(x) + 1)'$ también se calcula con la regla de cadena: tenemos $\text{sen}^2(x) + 1 = h(g(x))$, donde $h(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \text{sen } x$. Así

$$(\text{sen}^2(x) + 1)' = h'(g(x)) g'(x) = 2 \text{sen } x \cos x.$$

Sustituyendo esta derivada en la expresión para $f'(x)$,

$$f'(x) = \frac{2 \text{sen } x \cos x}{\ln(3) (\text{sen}^2(x) + 1)}.$$

Ejercicio 2. La temperatura de un objeto, en función del tiempo t , está dada por

$$T(t) = 25 + 50 e^{-0,1 t}.$$

Determine la razón de cambio de la temperatura (es decir, la derivada $T'(t)$).

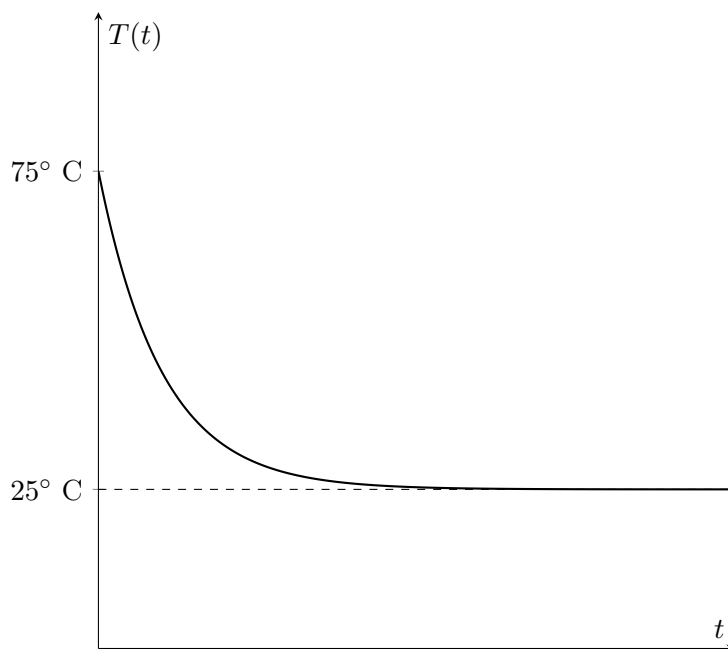
Calculamos

$$T'(t) = (25 + 50 e^{-0,1 t})' = 50 (e^{-0,1 t})' = 50 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1 t} = -5 e^{-0,1 t}.$$

Aquí utilizamos la derivada $(e^t)' = e^t$ y la regla de la cadena para calcular $(e^{-0,1 t})' = -0,1 e^{-0,1 t}$.

Este modelo describe un proceso de enfriamiento: en el momento $t = 0$ la temperatura inicial es $T(0) = 75^\circ \text{ C}$, y luego el objeto se enfría exponencialmente, su temperatura se acerca a 25° C .

La derivada siempre es negativa: $T'(t) = -5 e^{-0,1 t} < 0$, lo cual significa que la temperatura decrece, aunque cuando t se hace más grande, el valor de $T'(t)$ se acerca a cero, y el enfriamiento es cada vez más lento.



Ejercicio 3. La población, en función del tiempo t , está dada por

$$N(t) = 10000 e^{0,05 t}.$$

Determine la velocidad de crecimiento de la población en $t = 20$ (es decir, $N'(20)$).

Solución. Calculamos la derivada

$$N'(t) = (10000 e^{0,05 t})' = 10000 (e^{0,05 t})' = 10000 \cdot 0,05 \cdot e^{0,05 t} = 500 e^{0,05 t}.$$

Para $t = 20$,

$$N'(20) = 500 e \approx 1359.$$

Si t se mide en años, esto significa que en el año $t = 20$, la población crece a una tasa aproximada de 1359 personas por año. La tasa de crecimiento aumenta con el tiempo.