

# Álgebra lineal

## Semana 2: Matrices. Soluciones

21 de agosto de 2026

1. Calcule el producto  $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  para las siguientes matrices  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Solución.* Producto de una matriz cuadrada de  $n \times n$  por una matriz columna de  $n$  números siempre es otra matriz columna de  $n$  números. En estos casos calculamos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Para las siguientes matrices  $A, B$  determine cuándo  $AB = BA$ :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Solución.* En el caso 1, calculamos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

así que  $AB \neq BA$ .

En el caso 2,  $AB = BA$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, en el caso 3,  $AB \neq BA$ :

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 11 \\ 10 & -15 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 \\ 8 & -25 \end{pmatrix}.$$

En fin, en el caso 4, tenemos  $AB = BA$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 20 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 20 \end{pmatrix}.$$

**3. Calcule el producto  $AB$  para las siguientes matrices  $A, B$ :**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Solución.* Recordamos que si  $A$  es de tamaño  $m \times n$  y  $B$  es de tamaño  $n \times p$ , entonces  $AB$  es de tamaño  $m \times p$ .

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 15 & -19 \\ -14 & -10 & -10 \\ -5 & 15 & -11 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 16 & 20 \\ -14 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

**4. Para una matriz cuadrada  $A$  y un número  $n = 1, 2, 3, \dots$  podemos definir las potencias  $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ veces}}$ . Calcule todas las potencias  $A^n$  para**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Es decir,  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AAA = A^2 A$ ,  $A^4 = AAAA = A^3 A = (A^2)^2$ , etc.)

*Solución.* En general, habrá una lista infinita de potencias  $A, A^2, A^3, \dots$  pero estas matrices son especiales y se puede encontrar un patrón.

Para la primera matriz,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= A^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^4 &= A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^5 &= A, \text{ etc.} \end{aligned}$$

De hecho, aquí se puede reconocer que  $A^2 = -I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, pero con signo negativo, así que sin hacer el resto de cálculos,

$$A^3 = -I \cdot A = -A, \quad A^4 = (A^2)^2 = (-I)^2 = I, \quad A^5 = A^4 A = IA = A, \quad \dots$$

En general, si  $A^n = I$  para algún  $n$ , entonces  $A^{n+1} = A$ ,  $A^{n+2} = A^2$ , y las potencias se repiten.

Para la segunda matriz,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y, en fin, por la abundancia de ceros, se ve que

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

es la matriz nula. Esto quiere decir que el resto de potencias  $A^5, A^6, A^7, \dots$  todas serán matrices nulas. Esta no es una coincidencia: se puede probar que en general, si  $A$  es una matriz triangular de  $n \times n$  (superior o inferior) que tiene ceros en la diagonal, entonces  $A^n = 0$ . Calculando las potencias de  $A$  se verá que arriba de la diagonal (abajo en el caso triangular inferior) siempre habrá más ceros, hasta llegar a la matriz nula.

**5. Verifique las leyes distributivas  $(A + B)C = AC + BC$  y  $A(B + C) = AB + AC$ .**

*Solución.* En la identidad  $(A + B)C = AC + BC$ , para que las sumas y productos tengan sentido,  $A$  y  $B$  deben ser de  $m \times n$  y  $C$  debe ser de  $n \times p$ . Escribamos  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,  $C = (c_{jk})$ . Las entradas de  $A + B$  son  $a_{ij} + b_{ij}$ , y luego las entradas de  $D = (A + B)C$  son

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + b_{ij}) c_{jk}.$$

Pero esto es lo mismo que

$$\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} c_{jk} + \sum_{1 \leq j \leq n} b_{ij} c_{jk}$$

que son las entradas de  $AC + BC$ .

La identidad  $A(B + C) = AB + AC$  es muy similar.