

Álgebra lineal

Tarea 3: Matrices inversas. Soluciones

28 de agosto de 2026

1. Usando el algoritmo de Gauss–Jordan, calcule A^{-1} o demuestre que A no es invertible para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Cuando A es invertible, confirme que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Solución. Para la primera matriz,

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & | & 1 & 0 \\ -3 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{8} F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & | & \frac{1}{8} & 0 \\ -3 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 3 F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & | & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & | & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow 8 F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & | & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & | & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - \frac{3}{8} F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 & -3 \\ 0 & 1 & | & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculamos para comprobar:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No es necesario calcular el otro producto AA^{-1} , pues para matrices cuadradas, si $BA = I$, entonces $AB = I$.

Para la segunda matriz,

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 15F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -17 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 8F_2} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -17 & 15 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Para comprobar el resultado, calculamos

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -17 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para la tercera matriz,

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} -9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 6F_1} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -30 & -20 & 0 & 1 & 6 \\ -9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 9F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -30 & -20 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -51 & -34 & 1 & 0 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{30}F_2} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -51 & -34 & 1 & 0 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 51F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{10} & -\frac{6}{5} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Con obtener 0,0,0 en la última fila se acaba el algoritmo: la parte izquierda no puede reducirse a la matriz I , por lo que A no es invertible.

2. Calcule la inversa A^{-1} para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. De nuevo, usamos el algoritmo de Gauss-Jordan, empezando por la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Podemos restar la primera fila de las de abajo; es decir, aplicar las operaciones elementales $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$, $F_4 \rightarrow F_4 - F_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Luego, aplicando $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2$, $F_4 \rightarrow F_4 - 3F_2$,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Finalmente, $F_4 \rightarrow F_4 - 3F_3$ nos deja con

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

El resultado es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$