

Álgebra lineal
Tarea 4: Matrices y sistemas de ecuaciones. Determinantes.
Soluciones

4 de septiembre de 2026

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 5y - 5z = 1 \\ -3x + 8y + 8z = 1 \\ -5y - 6z = 1 \end{cases}$$

usando la matriz inversa A^{-1} para la matriz de coeficientes. Confirme sus cálculos sustituyendo x, y, z en las ecuaciones.

Solución. La matriz de coeficientes en este caso es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ -3 & 8 & 8 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la inversa, usamos el algoritmo de Gauss–Jordan sobre la matriz aumentada $(A \mid I)$.

Primero, queremos obtener en la parte izquierda una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y después usar los unos de la diagonal para eliminar las entradas que están por encima de ellos.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -5 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{2} F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 3 F_1} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 2 F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 5 F_2} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 15 & 10 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -10 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_3} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -10 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + \frac{5}{2} F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & -37 & -25 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -10 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + \frac{5}{2} F_2} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -10 & -1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Entonces, según nuestros cálculos,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 18 & 12 & 1 \\ -15 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobarlo, podemos calcular

$$A^{-1} A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 18 & 12 & 1 \\ -15 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ -3 & 8 & 8 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Por ejemplo, en la entrada $(1, 1)$ del producto de matrices está

$$8 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 1,$$

y en la entrada $(1, 2)$ está

$$8 \cdot (-5) + 5 \cdot 8 + 0 \cdot (-5) = 0,$$

etc.

Ahora, nuestro sistema de ecuaciones puede ser escrito como una ecuación con matrices

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando que A es invertible, se puede multiplicar ambos lados por A^{-1} por la izquierda para obtener la única solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 18 & 12 & 1 \\ -15 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Podemos sustituir $x = 13$, $y = 31$, $z = -26$ en las ecuaciones para comprobar que esta es la solución correcta:

$$\begin{aligned}2x - 5y - 5z &= 2 \cdot 13 - 5 \cdot 31 + 5 \cdot 26 = 1 \\-3x + 8y + 8z &= -3 \cdot 13 + 8 \cdot 31 - 8 \cdot 26 = 1 \\-5y - 6z &= -5 \cdot 31 + 6 \cdot 26 = 1\end{aligned}$$

2. Calcule los siguientes determinantes usando la eliminación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Solución. La idea es usar las operaciones elementales sobre las filas (o sobre columnas) para obtener una matriz triangular

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & a_{33} & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

y luego usar que para esta matriz el determinante es el producto de los números en la diagonal $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

La operación elemental $F_i \rightarrow F_i + \alpha F_j$ no afecta el determinante, mientras que $F_i \rightarrow \alpha F_i$ lo multiplica por α y el intercambio de filas $F_i \leftrightarrow F_j$ cambia el signo del determinante.

Para la primera matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1}]{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + \frac{2}{3}F_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{3} \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{22}{3}\right) = -22.$$

Para la segunda matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-13) = 26.$$

Para la tercera matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 + \frac{2}{5} F_2]{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4 \rightarrow F_4 - \frac{5}{18} F_3]{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) \cdot \left(-\frac{18}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = 9.$$

Para la última matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 + \frac{3}{2} F_1]{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4 \rightarrow F_4 - \frac{1}{2} F_2]{F_3 \rightarrow F_3 - \frac{11}{8} F_2} \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & \frac{51}{8} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4 \rightarrow F_4 + \frac{1}{3} F_3]{=} \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & \frac{51}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot 6 \cdot \frac{5}{8} = -30.$$

3. Demuestre la siguiente fórmula:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Solución. Este ejercicio es un poco más laborioso y es opcional, aquí no se trata de números, sino de expresiones algebraicas con variables x_1, x_2, x_3, x_4 , pero funcionan las mismas operaciones elementales con filas y columnas.

Primero, restamos la primera fila a cada una de las filas siguientes, y nos queda

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ 0 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix}.$$

Ahora, gracias a las identidades

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

notamos que las filas 2, 3, 4 tienen un múltiplo común que se puede sacar del determinante:

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_1x_3 + x_1^2 \\ 0 & 1 & x_4 + x_1 & x_4^2 + x_1x_4 + x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Al último determinante se pueden aplicar las operaciones elementales, y nos conviene hacerlas con columnas: $C_3 \rightarrow C_3 - x_1 C_2$ nos da

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 + x_1 x_3 + x_1^2 \\ 0 & 1 & x_4 & x_4^2 + x_1 x_4 + x_1^2 \end{vmatrix}.$$

A esta matriz le aplicamos $C_4 \rightarrow C_4 - x_1 C_3 - x_1^2 C_2$:

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 \\ 0 & 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Ahora aplicamos $C_2 \rightarrow C_2 - x_1 C_1$:

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 \\ 0 & 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Y ahora $C_3 \rightarrow C_3 - x_2 C_2$, $C_4 \rightarrow C_4 - x_2^2 C_2$:

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2^2 \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2^2 \end{vmatrix}.$$

En fin, aplicamos $C_4 \rightarrow C_4 - (x_3 + x_2) C_3$:

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 - x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2^2 - (x_3 + x_2)(x_4 - x_2) \end{vmatrix}.$$

Este es el determinante de una matriz triangular (inferior), tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 - x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2^2 - (x_3 + x_2)(x_4 - x_2) \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_2),$$

donde $(x_4 - x_3) \cdot (x_4 - x_2) = x_4^2 - x_2^2 - (x_3 + x_2)(x_4 - x_2)$. Juntando los cálculos,

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Esto funciona para cualquier matriz de $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

La matriz se conoce como la matriz de Vandermonde, y su determinante es

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Por ejemplo, para 2×2 la fórmula es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

y para 3×3 es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

Trate de demostrar el caso de 3×3 usando las operaciones elementales.