

Álgebra lineal

Tarea 5: Fórmulas para determinantes. Soluciones

18 de septiembre de 2026

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 1. Calcule la matriz adjunta $\text{adj } A$.

Soluciones. Primero, necesitamos calcular los cofactores:

$$\begin{aligned} C_{11} &= + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, & C_{12} &= - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -10, & C_{13} &= + \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -16, \\ C_{21} &= - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, & C_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4, & C_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7, \\ C_{31} &= + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, & C_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3, & C_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & 3 \\ -16 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 2. Calcule el determinante de 5 maneras diferentes:

- 1) con operaciones elementales con filas,
- 2) con operaciones elementales con columnas,
- 3) con la fórmula de permutaciones

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32},$$

- 4) con la expansión $a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3}$ por una fila i ,
5) con la expansión $a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j}$ por una columna j .

Solución. Usando las operaciones elementales con filas,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 4F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - \frac{7}{6}F_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$$

Usando las operaciones elementales con columnas,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 + C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 + \frac{1}{2}C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -3.$$

El cálculo con la fórmula de permutaciones es el más tedioso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} =$$

$$1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot (-4) \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) \cdot 3 =$$

$$4 - 16 - (-4) - 3 + (-4) + 12 = -3.$$

La expansión por la primera fila, utilizando los cofactores que calculamos anteriormente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-10) + (-1) \cdot (-16) = 1 - 20 + 16 = -3.$$

La expansión por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{11}C_{21} + a_{31}C_{31} = 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = -3.$$

Pregunta 3. Calcule la matriz inversa A^{-1} utilizando la matriz adjunta.

Solución. Tenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & 3 \\ -16 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{16}{3} & \frac{7}{3} & -2 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar nuestros cálculos, multiplicamos las matrices:

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{16}{3} & \frac{7}{3} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 4. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -4x - 2y + z = 1 \\ -2x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

utilizando la regla de Cramer.

Solución. Necesitamos calcular cuatro determinantes. El primero ya fue calculado de todas las maneras posibles:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3.$$

Otros tres determinantes son

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{=-4} + (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{=7} = 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{=-4} + (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}_{=-6} = 2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{=-7} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}_{=-6} = 5.$$

Entonces, por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{2}{3}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{5}{3}.$$

Para comprobar, sustituimos estos números en las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 0, \\ -4x - 2y + z & = & \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = 1, \\ -2x + 3y - 2z & = & \frac{2}{3} - 2 + \frac{10}{3} = 2. \end{array} \right.$$