

Álgebra lineal

Tarea 6: Independencia lineal. Soluciones

25 de septiembre de 2026

**Para los vectores de abajo determine si son linealmente independientes.
Si no son linealmente independientes, encuentre una dependencia lineal.**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (6)$$

Solución. Para dos vectores u, v , una dependencia lineal $\alpha u + \beta v = 0$ significa que uno es un múltiplo del otro: si $\alpha \neq 0$, entonces $u = -\frac{\beta}{\alpha}v$, y si $\beta \neq 0$, entonces $v = -\frac{\alpha}{\beta}u$.

En el caso (1),

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y se ve que

$$v = -2u.$$

El cálculo del determinante también nos da

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-6) \cdot (-2) = 0.$$

En el caso (2), para

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

el vector u no es un múltiplo de v , y lo podemos comprobar calculando

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -9 \neq 0.$$

Aquí los vectores son linealmente independientes.

Cuando tenemos vectores $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ y $m > n$, siempre hay una dependencia lineal entre ellos. **En el caso (3),**

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Buscamos una dependencia lineal

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0,$$

es decir,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 3\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8\alpha_3 \\ -9\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto corresponde al sistema de 2 ecuaciones en 3 variables

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 + 8\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Podemos eliminar α_1 con la operación elemental con ecuaciones $E_1 \rightarrow E_1 - 4E_2$:

$$\begin{cases} -11\alpha_2 + 44\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Para obtener una solución no trivial, podemos tomar, por ejemplo,

$$\alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 1,$$

y luego de la segunda ecuación,

$$\alpha_1 = 3\alpha_2 + 9\alpha_3 = -3.$$

Comprobamos:

$$-3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 4 + 8 \\ -3 + 12 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el caso (4), tenemos 3 vectores en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -(-5) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 19 = -1 \neq 0.$$

Esto quiere decir que los vectores son linealmente independientes.

En el caso (5), para los vectores

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

calculamos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 13 & -3 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 13 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 \cdot \left(-2 \cdot 34 - (-17) + 51 \right) = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que existe una dependencia lineal

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 5\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 13\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Usamos la eliminación gaussiana para obtener una matriz escalonada. Vamos a omitir la última columna de la matriz aumentada que siempre es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 13 & -3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{4} F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1} \\ &\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow \frac{2}{9} F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 12F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La última fila que nos salió es $(0 \ 0 \ 0)$ precisamente porque $\det A = 0$ y hay una dependencia lineal. (De hecho, no era necesario calcular el determinante, podríamos empezar directamente con la eliminación.)

De la segunda fila,

$$\alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_3 = 0,$$

así podemos tomar, por ejemplo, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$.

De la primera fila,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_3 = -2.$$

Comprobamos:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 + 2 + 3 \cdot 2 \\ -2 \cdot 5 + 7 + 3 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 + 13 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, **en el caso (6)** tenemos 4 vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entre estos vectores debe haber una dependencia lineal

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0.$$

Para encontrar los α_i , aplicamos la eliminación gaussiana a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{2} F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3 F_1} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 2 \\ -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{7} F_2} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 3 F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow 7 F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La última fila corresponde a la ecuación

$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Podemos tomar

$$\alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1.$$

Luego, de la segunda fila,

$$\alpha_2 = -\frac{5}{7} \alpha_3 + \frac{2}{7} \alpha_4 = -\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = -1,$$

y de la primera fila,

$$\alpha_1 = -2\alpha_2 - \alpha_3 = 2 - 1 = 1.$$

Comprobamos:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4 + 2 - 0 \\ 3 + 1 - 2 - 2 \\ -1 + 5 - 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$