

Álgebra lineal

Tarea 7: Subespacios y bases. Soluciones

2 de octubre de 2026

Ejercicio 1. Verifique que los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

Expresa el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ como una combinación lineal de v_1 y v_2 .

Solución. $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 2, así cualesquiera dos vectores linealmente independientes v_1, v_2 forman una base. Para comprobar la independencia lineal, calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 5 \neq 0.$$

Para expresar $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en esta base, escribimos

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esto corresponde al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = -2, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -1. \end{cases}$$

Eliminando $E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = -2, \\ 5\alpha_2 = 3. \end{cases}$$

De aquí $\alpha_2 = \frac{3}{5}$, y luego

$$\alpha_1 = -2 + 2\alpha_2 = -\frac{4}{5}.$$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Considere los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1) Encuentre un vector $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que v_1, v_2, v_3 formen una base de $\mathbb{R}^3$.

2) Exprese cada uno de los vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ como una combinación lineal de v_1, v_2, v_3 .

Solución. Basta tomar cualquier vector v_3 tal que v_1, v_2, v_3 sean linealmente independientes. Por ejemplo, podemos tomar $v_3 = e_1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Para expresar e_2 y e_3 en términos de esta base, podemos invertir la matriz.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calculamos $A^{-1}b$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar, para resolver el sistema de ecuaciones

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calculamos $A^{-1}b$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión:

$$e_2 = -v_1 + v_3,$$

$$e_3 = v_2 - v_3.$$

Ejercicio 3. Fijemos dos números $(a, b) \neq (0, 0)$ y consideremos la recta en el plano $\mathbb{R}^2$ definida por la ecuación $ax + by = 0$. Demuestre que el conjunto de los puntos de la recta es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1.

Solución. Denotemos por V el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ en cuestión:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0 \right\}.$$

Comprobamos que este es un subespacio.

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$, dado que $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.
- Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$, entonces $ax_1 + by_1 = 0$, $ax_2 + by_2 = 0$. Sumando estas ecuaciones, $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = 0$, así que $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in V$.
- Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$, entonces $ax + by = 0$ implica que $a(\alpha x) + b(\alpha y) = 0$, así $\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$.

Para ver que la dimensión es 1, necesitamos encontrar una base de 1 vector. Usando que $(a, b) \neq (0, 0)$, podemos suponer que, por ejemplo, $b \neq 0$, y escribir

$$ax + by = 0 \iff y = -\frac{a}{b}x.$$

Así los vectores en V tienen la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ -\frac{a}{b}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}.$$

El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}$ genera V y $\dim V = 1$.

Ejercicio 4. Fijemos tres números $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y consideremos el plano en el espacio $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $ax + by + cz = 0$. Demuestre que el conjunto de los puntos en el plano es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

Solución. Denotemos

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}.$$

La comprobación de que este es un subespacio es similar al ejercicio anterior. Nos interesa su dimensión. Usando que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, podemos suponer que, por ejemplo, $c \neq 0$ y escribir

$$ax + by + cz = 0 \implies z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Así

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Todo vector en V puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, el subespacio está generado por dos vectores:

$$V = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}.$$

Son linealmente independientes: si $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, usando que las primeras coordenadas de v_1 y v_2 son $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente.

Los vectores v_1 y v_2 forman una base de V , lo que implica que $\dim V = 2$.

Generalizando los ejercicios 3 y 4, fijando $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, la ecuación

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

define en $\mathbb{R}^n$ un subespacio de dimensión $n - 1$. Este es un **hiperplano** de dimensión $n - 1$.

Ejercicio 5. Se dice que una matriz A de $n \times n$ es **antisimétrica** si $A^t = -A$.

- 1) Demuestre que las matrices antisimétricas de $n \times n$ forman un subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- 2) Encuentre una base y la dimensión de este espacio para $n = 2$.
- 3) Encuentre una base y la dimensión de este espacio para $n = 3$.

Solución. Primero, comprobamos que

$$V = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$$

es un subespacio.

- La matriz nula $A = 0$ cumple con $A^t = -A$.
- Si $A^t = -A$ y $B^t = -B$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t = -A + (-B) = -(A + B)$.
- Si $A^t = -A$, entonces $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

Para encontrar una base, analizamos la condición $A^t = -A$:

$$A = (a_{ij}), \quad A^t = -A \iff a_{ji} = -a_{ij}.$$

De aquí los elementos diagonales son $a_{ii} = 0$.

En el caso de 2×2 , las matrices tienen forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde sale una base

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\dim V = 1$.

Para $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos una base

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto $\dim = 3$.

En general, una base sería $e_{ij} - e_{ji}$ para $1 \leq i < j \leq n$, de donde

$$\dim V = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$