

Álgebra lineal

Tarea 8: Aplicaciones lineales

9 de octubre de 2026

Ejercicio 1. Para las siguientes aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ determine si son invertibles y describa la aplicación inversa $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuando esta exista.

$$1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - 3x \\ 2y - 3x \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y - x \\ 2x - 6y \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ -2x - y \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Consideremos las aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ asociadas a las matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Geométricamente, describa qué transformación del plano representa cada aplicación.
- 2) Describa las composiciones $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}$ y las aplicaciones inversas f^{-1} .

Ejercicio 3. Para una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de $n \times n$ la **traza** es la suma de sus elementos diagonales: $\text{tr } A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

- 1) Verifique que la traza define una aplicación lineal $\text{tr}: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2) Describa el núcleo y calcule su dimensión.

Ejercicio 4. Sea P_n el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Consideremos la **derivada** y la **integral**

$$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2 a_2 x + a_1,$$
$$\int_0^x (a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx = \frac{1}{n} a_{n-1} x^n + \cdots + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_0 x.$$

- 1) Verifique que estas son aplicaciones lineales $D: P_n \rightarrow P_{n-1}$, $I: P_{n-1} \rightarrow P_n$.
- 2) Escriba las matrices correspondientes respecto a las bases $1, x, x^2, \dots, x^n$ para P_n y $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ para P_{n-1} .
- 3) Calcule las dos composiciones $D \circ I: P_{n-1} \rightarrow P_{n-1}$ e $I \circ D: P_n \rightarrow P_n$ y escriba las matrices correspondientes.