

Introducción al cálculo diferencial

13 de octubre de 2026

Índice

I	Funciones	3
1.	Conjuntos	3
1.1.	Alguna notación lógica	3
1.2.	La noción de conjunto	3
1.3.	Operaciones con conjuntos	4
2.	Números reales	6
2.1.	Qué es un número real	6
2.2.	Intervalos en la recta real	7
3.	Funciones	8
3.1.	Gráficas de funciones	9
3.2.	Funciones lineales	12
3.3.	Funciones polinomiales	13
3.4.	Funciones racionales	14
3.5.	Funciones trigonométricas	15
3.6.	Funciones pares e impares	20
3.7.	Funciones crecientes y decrecientes	21
3.8.	Composición de funciones	22
3.9.	Función inversa	22
3.10.	Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas	22
3.11.	Gráfica de la función inversa	24
3.12.	Funciones exponenciales	26
3.13.	Funciones logarítmicas	30
II	Límites y continuidad	34

4. Límites de funciones	34
4.1. Introducción a los límites	34
4.2. Límite por la izquierda y por la derecha	38
4.3. Límites infinitos (asíntotas verticales)	40
4.4. Definición de límites en términos de ϵ - δ	44
4.5. Cálculo de límites	49
5. Funciones continuas	54
5.1. Ejemplos de discontinuidades	55
5.2. Propiedades de funciones continuas	57
5.3. Teorema del valor intermedio	58
III Derivadas	61
6. Definición y cálculo de las derivadas	61
6.1. Definición de la derivada	61
6.2. Funciones diferenciables y continuidad	65
6.3. Reglas de derivación	66
6.4. Derivadas de las funciones trigonométricas	68
6.5. Derivada de la composición de funciones (la regla de la cadena)	69
6.6. Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas	71
6.7. Derivada y la recta tangente a la gráfica	72
6.8. Aproximaciones lineales	75
6.9. Derivadas de orden superior	76
6.10. Perspectiva: aproximaciones con las derivadas superiores	78

Parte I

Funciones

Nuestro objetivo es el estudio de funciones $f(x)$ de variable real x . Antes de empezar con el cálculo como tal, necesitamos aclarar qué es un número real, qué es una función, fijar alguna notación que se usará en el curso y juntar ejemplos útiles de funciones.

1. Conjuntos

1.1. Alguna notación lógica

Para dos afirmaciones A y B vamos a escribir

- $A \implies B$ si A **implica** B (cuando se cumple A , se cumple B),
- $A \iff B$ si A implica B y B implica A ; en este caso se dice que A y B son **equivalentes**.

1.2. La noción de conjunto

Un **conjunto** es una colección de **elementos**. Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, como $X, Y, Z, \dots$. Cuando un conjunto consiste en un número finito de elementos, se usa la notación

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

1.2.1 Notación. Cuando x es un elemento de X , se escribe $x \in X$ y se dice que x **pertenece a** X (o también $X \ni x$, « X contiene a x »).

Cuando x no es un elemento de X , se escribe $x \notin X$ y se dice que x **no pertenece a** X (o también $X \not\ni x$, « X no contiene a x »).

El conjunto está completamente definido por sus elementos.

1.2.2 Notación. Si $\mathcal{P}(x)$ es una propiedad de elemento x que puede ser verdadera o falsa, entonces

$$X = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$$

denota el conjunto de todos los x que cumplen $\mathcal{P}(x)$.

1.2.3 Definición. Para dos conjuntos X e Y :

- Se dice que X es un **subconjunto** de Y , o que X **está contenido** en Y y se escribe $X \subseteq Y$ (o también $Y \supseteq X$) si todo elemento de X es también un elemento de Y :

para todo $x \in X$ se tiene $x \in Y$.

- Se dice que los conjuntos son **iguales** y se escribe $X = Y$ cuando todo elemento de X es también un elemento de Y y viceversa, todo elemento de Y es un elemento de X :

$$x \in X \iff x \in Y$$

para todo $x \in X$.

Notamos que esto es equivalente a decir que $X \subseteq Y$, y también $Y \subseteq X$:

$$X = Y \iff X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq X.$$

- Cuando $X \subseteq Y$, pero $X \neq Y$, se escribe $X \subsetneq Y$, o también $X \subset Y$.

1.2.4 Definición. El conjunto que no tiene ningún elemento se denomina el **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$.

1.2.5 Ejemplo. Los números naturales, enteros, racionales forman conjuntos que se denotan por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\},$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Tenemos inclusiones entre estos conjuntos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

En la inclusión $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, cada número entero n se ve como una fracción $\frac{n}{1}$.

1.2.6 Notación. Si X es un conjunto y $\mathcal{P}(x)$ es una propiedad de elementos $x \in X$ (que puede ser verdadera o falsa), entonces

$$\{x \in X \mid \mathcal{P}(x)\}$$

es el subconjunto de X que consiste en los elementos que cumplen $\mathcal{P}$.

1.2.7 Ejemplo. Tenemos $\mathbb{Z} = P \cup I$, donde

$$P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ par}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\},$$

$$I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ impar}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}.$$

1.3. Operaciones con conjuntos

1.3.1 Definición. Para dos conjuntos X, Y

- la **unión** $X \cup Y$ consiste en los elementos que están en X o en Y (o en ambos):

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ o } z \in Y\};$$

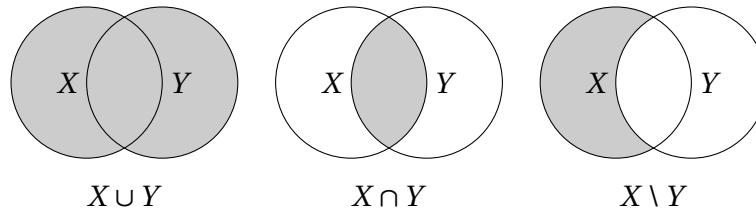
- la **intersección** $X \cap Y$ consiste en los elementos que están en ambos X e Y :

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\};$$

- la **diferencia** $X \setminus Y$ consiste en los elementos de X que no están en Y :

$$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$

Las relaciones entre conjuntos se dibujan mediante los **diagramas de Venn**:



1.3.2 Proposición. Si $X, Y \subseteq Z$, entonces

- 1) $Z \setminus (X \cup Y) = Z \setminus X \cap Z \setminus Y$,
- 2) $Z \setminus (X \cap Y) = Z \setminus X \cup Z \setminus Y$,
- 3) $Z \setminus (Z \setminus X) = X$.

Para cualesquiera X, Y, Z se cumple

- 4) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
- 5) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

Demostración. Vamos a demostrar la parte 1) para ilustrar cómo se razona con conjuntos; el resto se deja como un ejercicio. Tenemos

$$\begin{aligned} z \in Z \setminus (X \cup Y) &\iff \\ z \in Z \text{ y } z \notin X \cup Y &\iff \\ z \in Z \text{ y } z \notin X \text{ y } z \notin Y &\iff \\ z \in Z \setminus X \text{ y } z \in Z \setminus Y &\iff \\ z \in Z \setminus X \cap Z \setminus Y. & \end{aligned}$$

Aquí todas las conclusiones van en ambas direcciones, así que probamos

$$z \in Z \setminus (X \cup Y) \iff z \in Z \setminus X \cap Z \setminus Y,$$

es decir, que $Z \setminus (X \cup Y) = Z \setminus X \cap Z \setminus Y$. □

2. Números reales

2.1. Qué es un número real

En nuestro curso vamos a trabajar con los **números reales**, y estaría bien tener alguna idea de qué es un número real. El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$. Los números reales contienen a todos los números racionales $\frac{a}{b}$, pero también muchos más números que no son racionales, como, por ejemplo, $\sqrt{2}$ o el número π .

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Podemos pensar en los números reales como sus expansiones decimales:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414213\dots, \\ \pi &= 3,1415926\dots,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la expansión decimal puede ser infinita y no necesariamente periódica. En cálculos prácticos los decimales se truncan y se toman **aproximaciones** como $\sqrt{2} \approx 1,41$ o $\pi \approx 3,14$.

2.1.1 Hecho. Si para dos conjuntos de números reales $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ se tiene

$$x \leq y \text{ para todo } x \in X, y \in Y,$$

entonces existe un número $z \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \leq z \leq y \text{ para todo } x \in X, y \in Y.$$

Esta propiedad significa que la recta real **está completa** y no tiene huecos. Muchas construcciones de cálculo usan esta propiedad de los números reales.

2.1.2 Ejemplo. Para el número

$$\sqrt{2} = 1,414213\dots$$

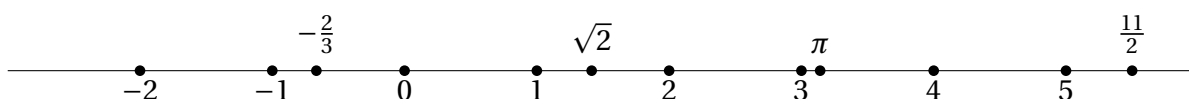
tenemos las aproximaciones

$$\begin{aligned}1 &< \sqrt{2} < 2, \\ 1 &< 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 < 2, \\ 1 &< 1,4 < 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 < 1,5 < 2, \\ \underbrace{1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < \dots}_{X} &< \underbrace{\sqrt{2}}_z < \underbrace{\dots < 1,415 < 1,42 < 1,5}_{Y} < 2, \\ &\dots\end{aligned}$$

Los números reales se pueden sumar y multiplicar, y satisfacen las identidades aritméticas conocidas

$$\begin{aligned}
 x + 0 &= 0 + x = x, \\
 x \cdot 1 &= 1 \cdot x = x, \\
 x + y &= y + x, \\
 xy &= yx, \\
 x + (-x) &= (-x) + x = 0, \\
 x \cdot \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} \cdot x = 1 \text{ para } x \neq 0, \\
 x + (y + z) &= (x + y) + z, \\
 x(yz) &= (xy)z, \\
 (x + y)z &= xz + yz.
 \end{aligned}$$

Además, es útil pensar en los números reales como puntos en la **recta numérica**:



Los números en la recta están **ordenados**: para $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple exactamente una de las tres posibilidades:

$$x < y \quad \text{o} \quad x = y \quad \text{o} \quad x > y.$$

Se cumplen las reglas conocidas para las desigualdades, como

$$\begin{aligned}
 x < y &\implies x + z < y + z, \\
 x > 0, y > 0 &\implies xy > 0.
 \end{aligned}$$

2.2. Intervalos en la recta real

2.2.1 Notación. Usaremos la siguiente notación para los **intervalos en la recta real**:

$$\begin{aligned}
 [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
 (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\
 [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\
 (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
 (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
 (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \\
 (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \\
 [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \\
 (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

El símbolo ∞ significa «infinito». Cabe notar que $\pm\infty$ son parte de la notación y no son números reales.

Los intervalos (a, b) con los extremos excluidos se denominan **abiertos**, mientras que los intervalos $[a, b]$, con los extremos incluidos se denominan **cerrados**.

3. Funciones

Las funciones representan dependencia de una cantidad de otra.

3.0.1 Ejemplo. El área del círculo depende de su radio como $A = \pi r^2$, así que A es una función de r . Se escribe

$$A(r) = \pi r^2$$

para subrayar que A depende de r .

3.0.2 Ejemplo. Si un objeto se mueve por la línea recta con velocidad constante v , entonces su posición como función de tiempo se expresa como

$$P(t) = P_0 + vt.$$

3.0.3 Ejemplo. Para un objeto en caída libre lanzado desde la altura y_0 , su altura como una función de tiempo se expresa como

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2,$$

donde $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad.

3.0.4 Ejemplo. La temperatura de ebullición del agua disminuye cuando aumenta la altura. Al nivel del mar esta temperatura es igual a 100°C por la definición de los grados Celsius. Irapuato se encuentra aproximadamente a 1700 metros al nivel del mar, y el agua se hierve aproximadamente a 95°C . Se trata de una función $T(h)$ donde h es la altura sobre el nivel del mar.

3.0.5 Definición. Sean X e Y dos conjuntos. Una **función** $f: X \rightarrow Y$ es una regla que asigna a cada elemento $x \in X$ exactamente un elemento $f(x) \in Y$.

Esto también se escribe como

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Se dice que x es la **variable** y $f(x)$ es el **valor** de f en x .

El conjunto X donde está definida la función se llama el **dominio** de f .

Los conjuntos X e Y a veces se omiten, pero realmente hacen parte de la definición de una función. En este curso X e Y casi siempre serán algunos subconjuntos de los números reales: $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

3.0.6 Definición. Para una función $f: X \rightarrow Y$ su **imagen** es el conjunto de todos los valores de f :

$$\{f(x) \mid x \in X\}.$$

En algunos libros de texto se usa el término **rango** en lugar de **imagen**. Son sinónimos.

3.1. Gráficas de funciones

3.1.1 Definición. Para una función $f: X \rightarrow Y$, su **gráfica** es el conjunto de pares

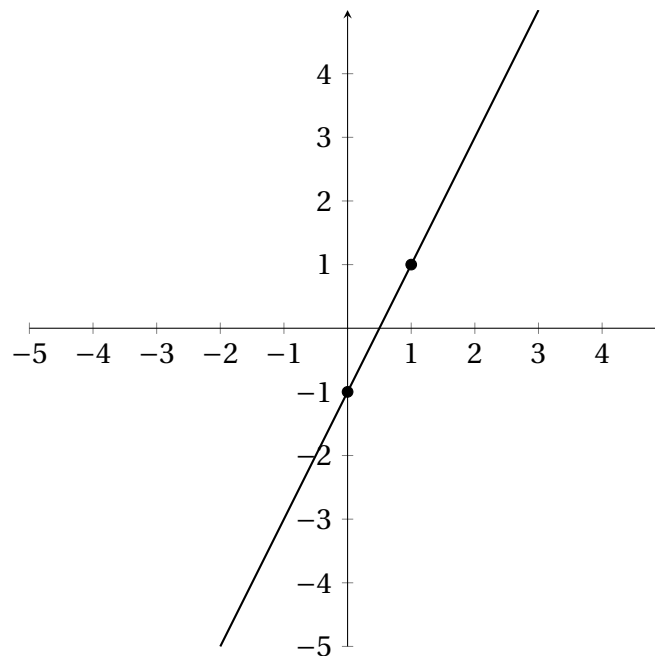
$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Nos van a interesar las funciones con X, Y subconjuntos de los números reales, y los puntos $(x, f(x))$ se pueden dibujar en el plano cartesiano (plano coordenado). Vamos a revisar cómo graficar algunas funciones sencillas.

3.1.2 Ejemplo. Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x - 1$$

la gráfica es una recta. Para trazarla, basta conocer dos valores de f , por ejemplo, $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, así la recta pasa por los puntos $(0, -1)$ y $(1, 1)$:



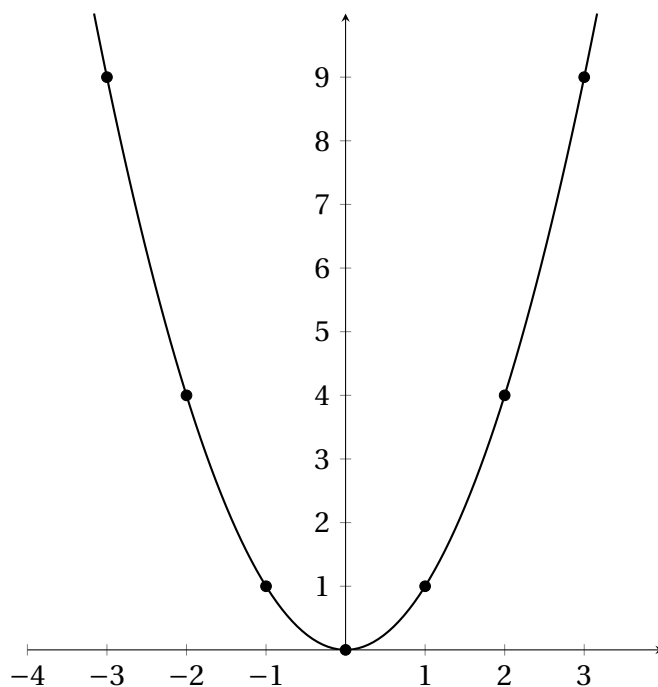
La imagen de esta función es toda la recta real $\mathbb{R}$: para cualquier $y \in \mathbb{R}$ existe x tal que $f(x) = y$. Esto significa que la ecuación lineal $y = 2x - 1$ siempre tiene una solución $x = \frac{y+1}{2}$.

3.1.3 Ejemplo. Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2$$

la gráfica se conoce como la **parábola**. Para trazarla, podemos calcular algunos valores:

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0, \\ (-1)^2 &= 1^2 = 1, \\ (-2)^2 &= 2^2 = 4, \\ (-3)^2 &= 3^2 = 9. \end{aligned}$$

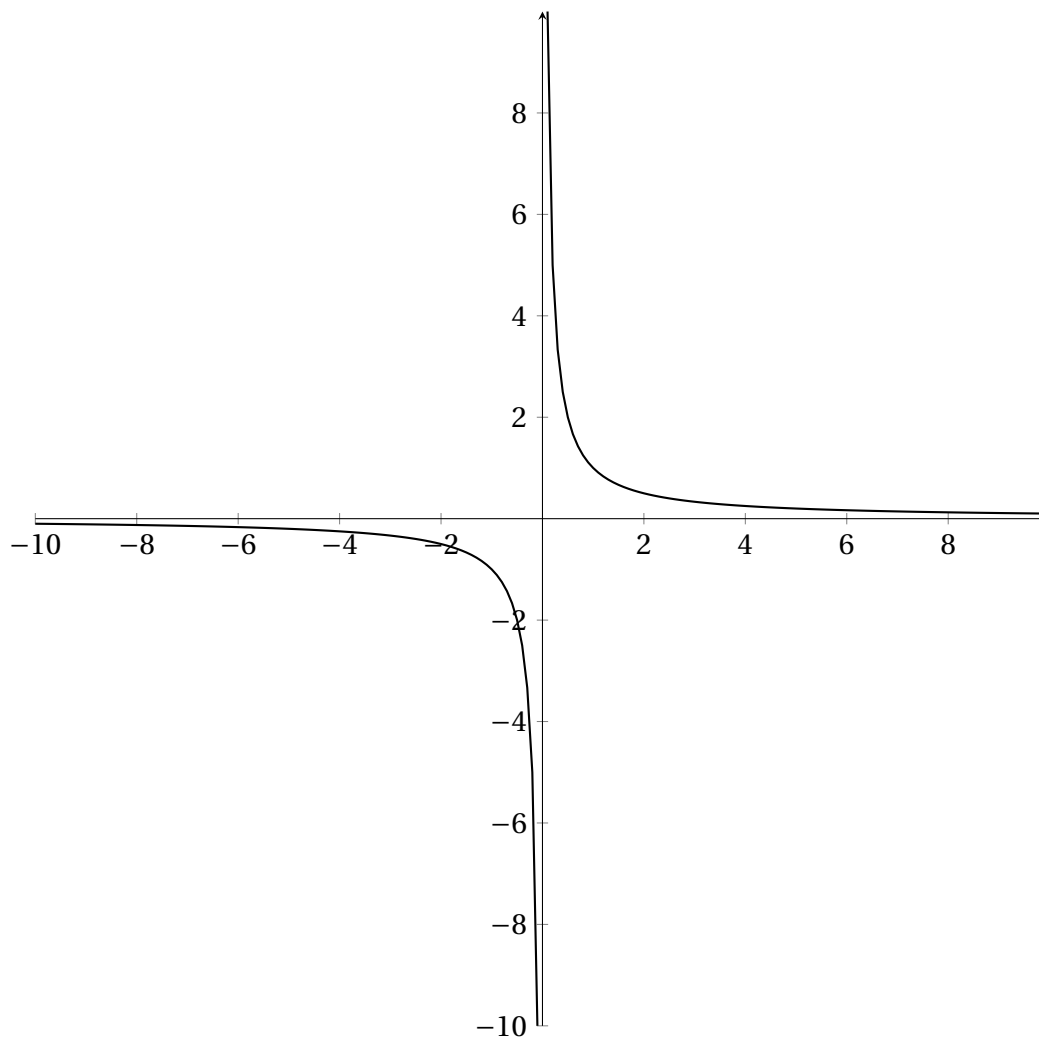


La imagen de esta función es el intervalo $[0, +\infty)$ porque los cuadrados x^2 son siempre números no negativos. Si tenemos $y \in [0, +\infty)$, entonces $y = x^2$ tiene solución $x = \sqrt{y}$.

3.1.4 Ejemplo. Para la función $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

la gráfica se conoce como la **hipérbola**. Nótese que el dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque la división $\frac{1}{0}$ no está definida.

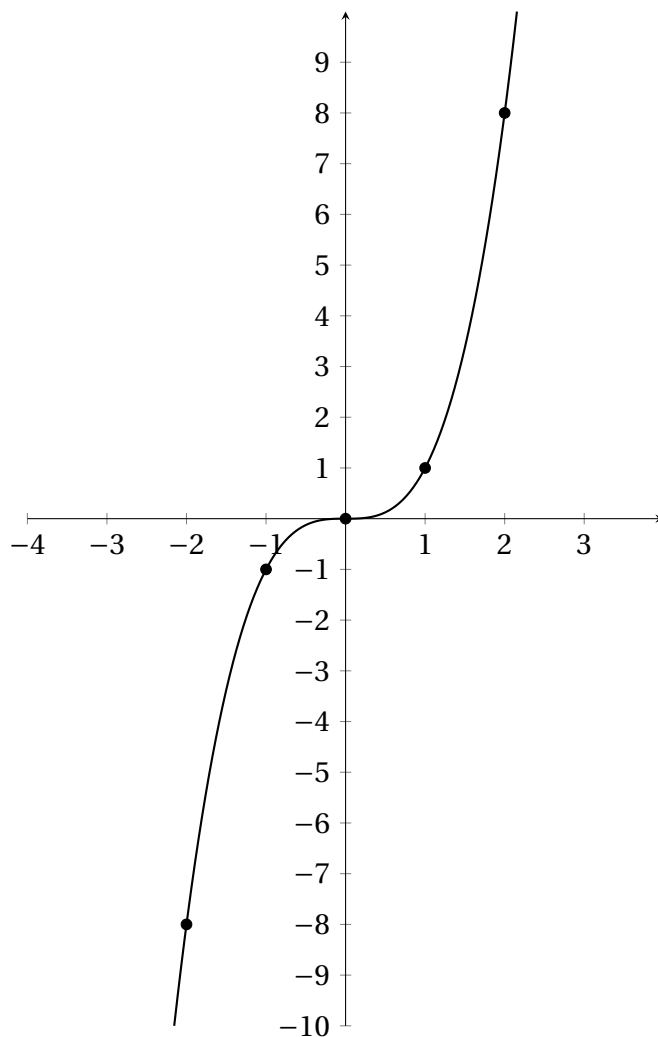


La imagen de esta función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: tenemos $\frac{1}{x} \neq 0$ para cualquier $x \neq 0$. Además, si $y = \frac{1}{x}$ para $y \neq 0$, entonces $x = \frac{1}{y}$, así cualquier número $y \neq 0$ está en la imagen de f .

3.1.5 Ejemplo. Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3$$

la gráfica es la siguiente:



La imagen de esta función es $\mathbb{R}$.

3.2. Funciones lineales

3.2.1 Definición. Una **función lineal** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la forma

$$f(x) = ax + b$$

para algunos números fijos a y b .

Si graficamos la función, a determina la pendiente de la recta, mientras que b determina la intersección de la recta con el eje y . La pendiente es la razón de cambio de $f(x)$ respecto a x : para cualquier $\Delta \neq 0$ tenemos

$$\frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} = \frac{(a(x + \Delta) + b) - (ax + b)}{\Delta} = a.$$

3.2.2 Ejemplo. Tomando como arriba $\Delta = 1$, para $f(x) = 2x - 1$ calculamos

x	$f(x)$
0	-1
1	1
2	3
3	5

etc. Cada vez que aumentamos x en una unidad $\Delta = 1$, el valor $f(x)$ sube por 2 unidades.

Las funciones lineales, por sí solas, no son muy interesantes para el cálculo, pero una de las ideas principales del cálculo diferencial es que, para cualquier función razonable f , los valores $f(x_0 \pm \Delta)$, cuando Δ es suficientemente pequeño, se comportan como los valores de una función lineal.

3.3. Funciones polinomiales

3.3.1 Definición. Una **función polinomial** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Aquí los a_i son algunos números fijos que se llaman los **coeficientes** del polinomio.

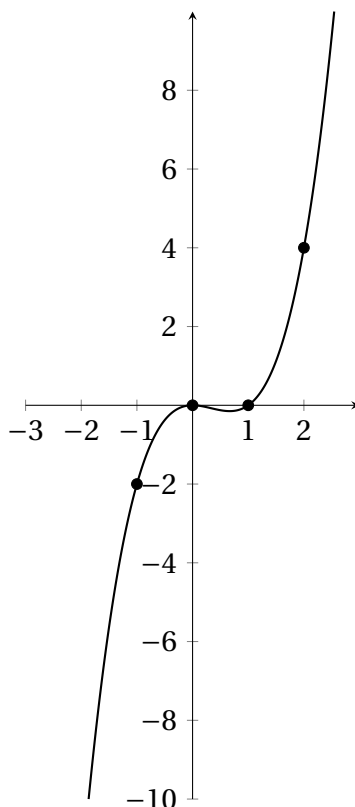
Suponiendo que $a_n \neq 0$ en la expresión de arriba, el número n se llama el **grado** de la función polinomial.

Una función polinomial de grado 1 es lineal.

3.3.2 Ejemplo. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 - x^2$$

es una función polinomial de grado 3.



Una función polinomial f de grado $n \geq 1$ tiene como mucho n **raíces** reales $x_0 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_0) = 0$. La gráfica de la función cruza el eje x como mucho n veces.

3.4. Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos polinomios.

3.4.1 Definición. Sean $f(x)$, $g(x)$ dos funciones polinomiales. Su cociente

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

se denomina una **función racional**. La función $h(x)$ está definida sobre el subconjunto de los números reales donde $g(x) \neq 0$:

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}.$$

3.4.2 Ejemplo.

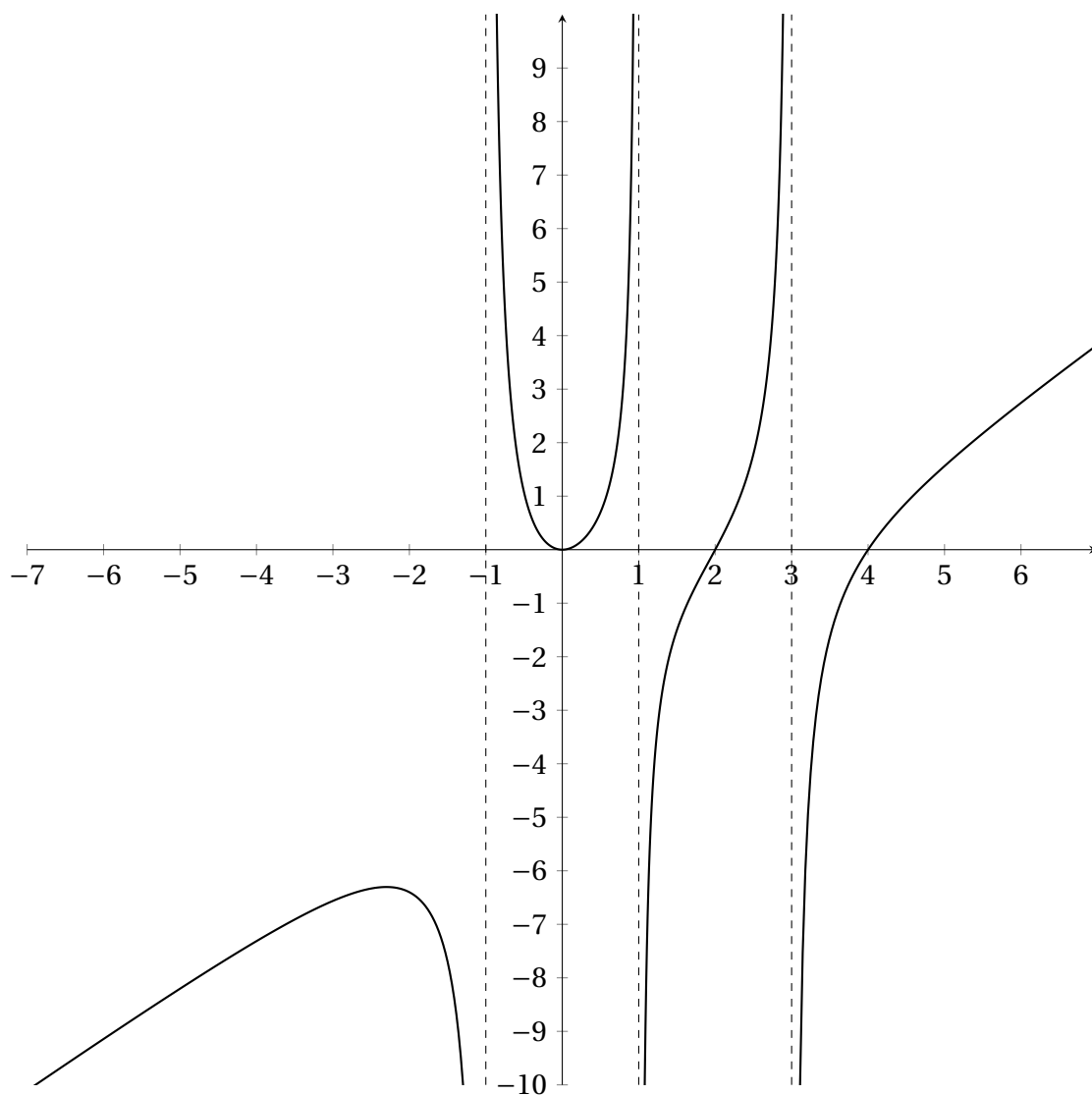
$$h(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 8x^2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$$

define una función racional. En el denominador está

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x + 1)(x - 1)(x - 3).$$

Esta función polinomial tiene $x_0 = -1, 1, 3$ como sus raíces, y $h(x)$ está definida cuando $x \neq -1, 1, 3$:

$$h: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

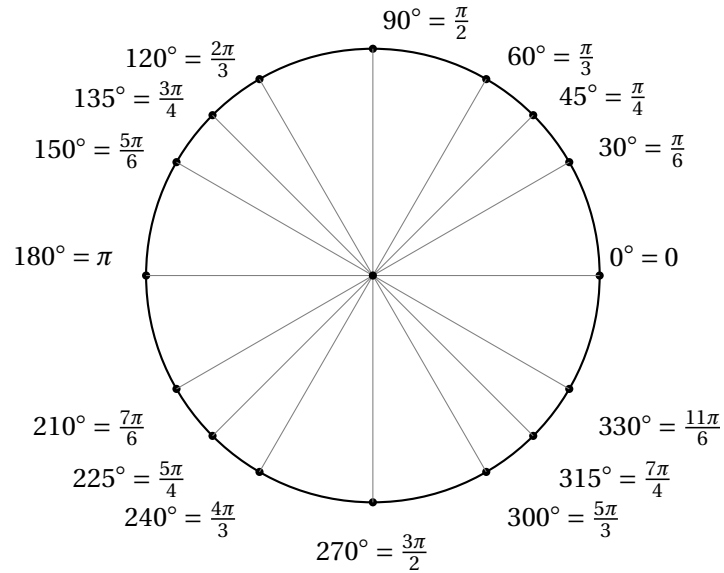


3.5. Funciones trigonométricas

Vamos a revisar las funciones trigonométricas sen, cos, tan. El lector debe conocerlas de la geometría escolar, pero nos sirve aclarar algunos puntos sobre las definiciones.

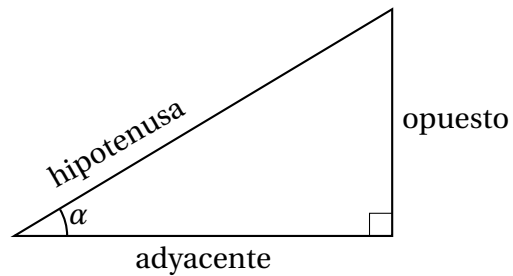
En cálculo, los ángulos se miden en **radia**nes:

$$360^\circ = 2\pi.$$

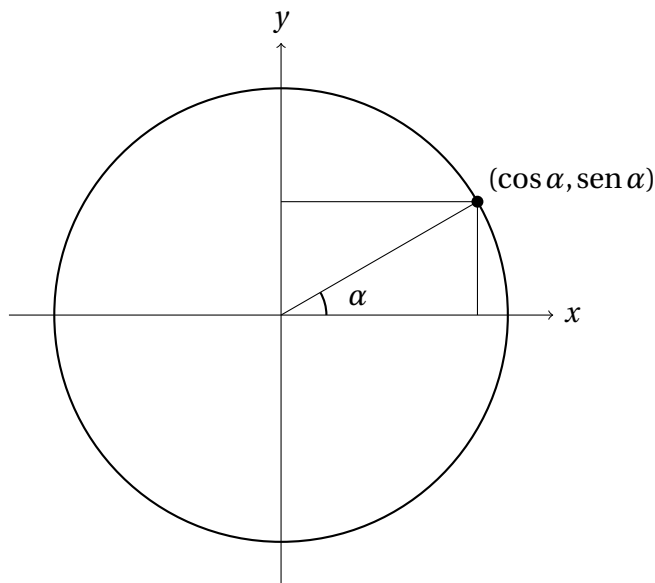


En un triángulo rectángulo, para un ángulo agudo α , tenemos el lado opuesto y el lado adyacente, y el **seno**, el **coseno** y la **tagente** se definen como las razones de longitudes

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \\ \operatorname{cos} \alpha &= \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \\ \tan \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}.\end{aligned}$$



Ya que se trata de razones, nos conviene suponer que la hipotenusa mide 1 e inscribir el triángulo en el círculo unitario. El punto que corresponde al ángulo α tendrá coordenadas $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$.



Cuando $\alpha = 0$ o cuando $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, el triángulo colapsa en un segmento y se tiene

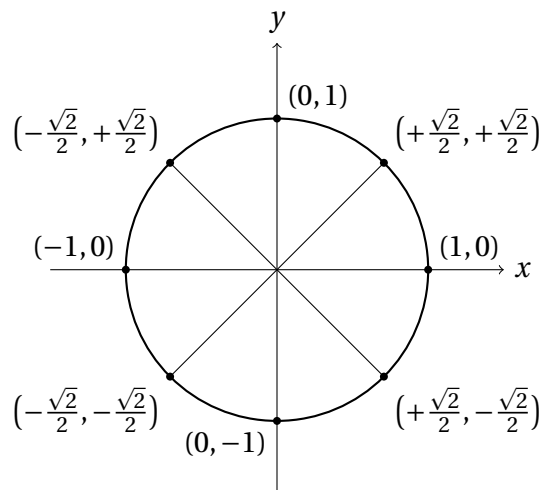
$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1, & \cos \frac{\pi}{2} &= 0, \\ \operatorname{sen} 0 &= 0, & \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} &= 1. \end{aligned}$$

A partir de ahora, dejaremos de lado la interpretación geométrica escolar y vamos a suponer que $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ son *por la definición* las coordenadas del punto que corresponde al ángulo α . El teorema de Pitágoras nos da

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Estos son algunos valores del seno y coseno que se ven en el círculo unitario (en lugar de α ponemos x , como normalmente denotamos la variable de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$):

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$



Los ángulos en el círculo unitario se miden en sentido antihorario desde el eje x , y los ángulos negativos se miden en sentido horario. Para ángulos mayores de $360^\circ = 2\pi$, se consideran varias vueltas alrededor del círculo. Así

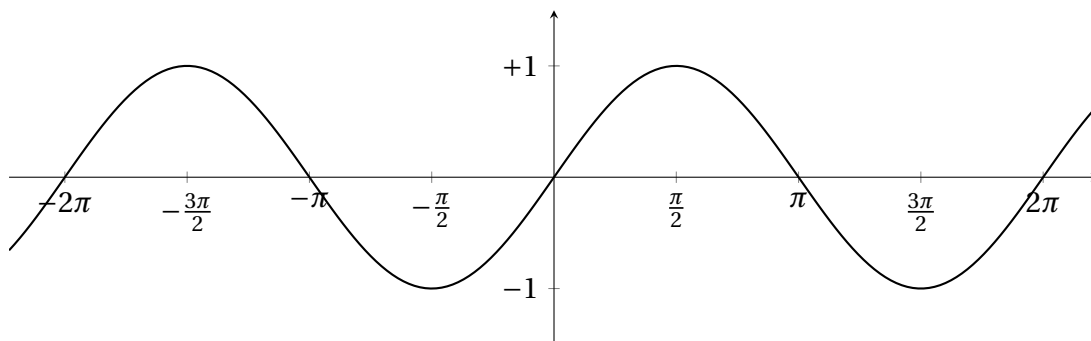
$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Por esta razón se dice que las funciones sen y $\cos$ son **periódicas** con **periodo** 2π : sus valores se repiten cada 2π .

Para todo x se tiene

$$-1 \leq \operatorname{sen} x, \cos x \leq +1,$$

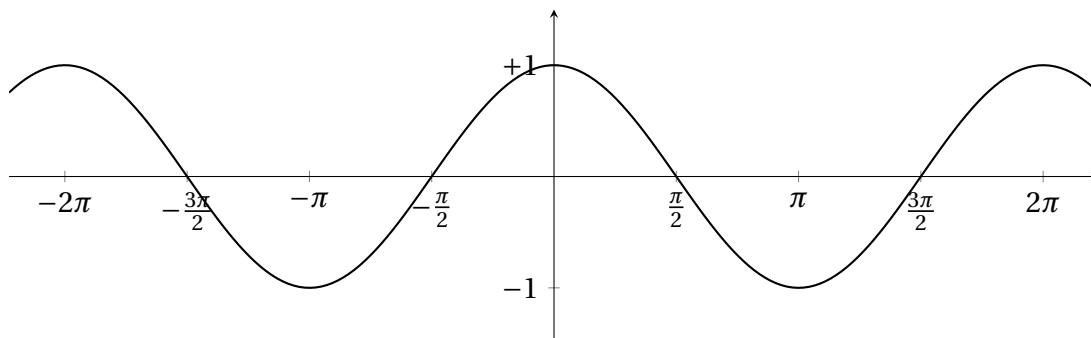
y las funciones oscilan entre -1 y $+1$. He aquí la gráfica del seno:



El coseno cumple

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

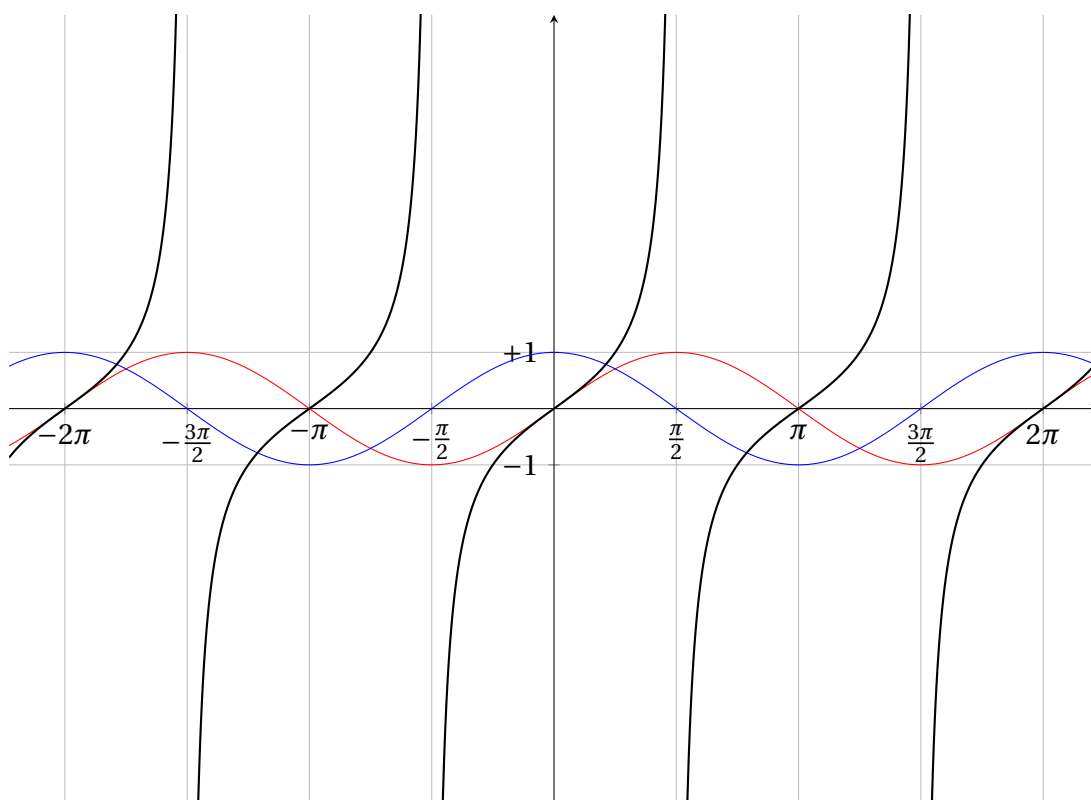
así que su gráfica es parecida a la del seno, pero desplazada por $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda:



La tangente $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ está definida donde $\cos x \neq 0$, es decir, para $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Los valores que toma $\tan x$ son todos los números reales $\mathbb{R}$. La tangente es periódica con periodo π :

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

Para graficar $\tan x$, podemos graficar $\sin x$ y $\cos x$ y analizar cómo se comporta el cociente $\frac{\sin x}{\cos x}$.



Las funciones trigonométricas aparecen en modelos de procesos periódicos: electricidad de corriente alterna, olas, vibraciones, sonido, etc.

3.6. Funciones pares e impares

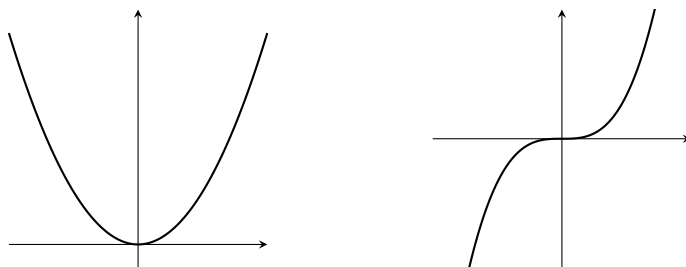
3.6.1 Definición. Para una función $f(x)$ definida sobre un subconjunto de los números reales se dice que f es

- **par** si $f(-x) = f(x)$,
- **impar** si $f(-x) = -f(x)$,

para todo x donde está definida la función.

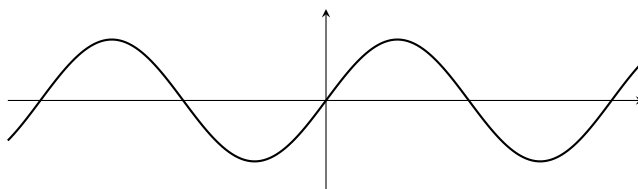
Notamos que para una función par la gráfica es simétrica respecto al eje y , y para una función impar la gráfica es simétrica respecto al origen $(0, 0)$.

3.6.2 Ejemplo. La función $f(x) = x^2$ es par y la función $f(x) = x^3$ es impar:

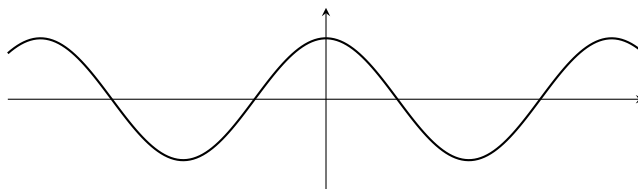


En general la función $f(x) = x^n$ es par si $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ es un número par y es impar si $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ es un número impar. De allí viene la terminología.

3.6.3 Ejemplo. La función $\sin x$ es impar:



La función $\cos x$ es par:



Como consecuencia, la tangente es una función impar:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

3.7. Funciones crecientes y decrecientes

3.7.1 Definición. Sea f una función definida sobre un intervalo I . Se dice que sobre el intervalo, f es

- **creciente**, si

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$

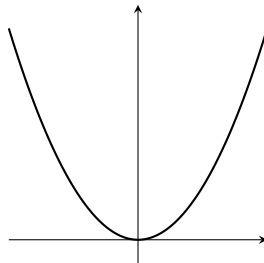
- **decreciente**, si

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2),$$

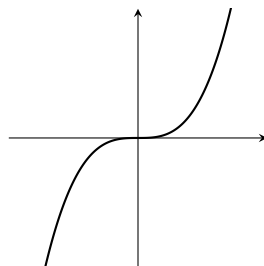
para todo $x_1, x_2 \in I$.

En la gráfica, la función es creciente sobre los intervalos donde la gráfica va hacia arriba y es decreciente sobre los intervalos donde la gráfica va hacia abajo.

3.7.2 Ejemplo. La función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y creciente sobre $(0, +\infty)$.



La función $f(x) = x^3$ es creciente sobre toda la recta real $\mathbb{R}$:



Aquí queremos introducir la noción de función creciente y decreciente, más adelante en el curso veremos cómo para una función específica $f(x)$ encontrar los intervalos donde esta crece o decrece.

3.8. Composición de funciones

3.8.1 Definición. Para dos funciones $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ la **composición** $g \circ f$ es una función $X \rightarrow Z$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Observamos que la notación $g \circ f$ significa que primero se aplica f , luego se aplica g .

3.8.2 Ejemplo. Consideremos las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 1$. Calculamos

$$(g \circ f)(x) = x^3 + 1,$$

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^3.$$

Estas dos funciones son diferentes: por ejemplo, $(g \circ f)(1) = 2$, mientras que $(f \circ g)(1) = 8$.

Cuando se tienen dos funciones $f, g: X \rightarrow X$, ambas composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ están definidas y dan otra función $X \rightarrow X$, pero normalmente $g \circ f \neq f \circ g$.

3.9. Función inversa

3.9.1 Definición. Para una función $f: X \rightarrow Y$ la función **inversa** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ es la que cumple con las propiedades

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$.

No hay que confundir la notación $f^{-1}(x)$ para la función inversa con $\frac{1}{f(x)}$.

3.9.2 Ejemplo. Para la función lineal $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

3.9.3 Ejemplo. Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

La función inversa no siempre existe, para que esta exista, $f: X \rightarrow Y$ debe tener unas propiedades muy especiales.

3.10. Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas

3.10.1 Definición. Para una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es...

- **inyectiva** si f toma diferentes valores en diferentes puntos:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

o, de manera equivalente,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

para todo $x_1, x_2 \in X$;

- **sobreyectiva** si cualquier elemento de Y sale como un valor de f ; es decir, si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- **biyectiva** si es inyectiva y biyectiva al mismo tiempo.

3.10.2 Ejemplo. La función $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es inyectiva: $x_1^2 = x_2^2$ implica que $x_1 = x_2$ para $x_1, x_2 \geq 0$.

Sin embargo, el conjunto de llegada de la función es $\mathbb{R}$ y, vista así, no es sobreyectiva porque $x^2 \geq 0$ y la imagen de la función es $[0, +\infty)$.

Si consideramos $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$, esta sí será también sobreyectiva, y por ende biyectiva.

3.10.3 Ejemplo. La función $\text{sen}: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ es sobreyectiva: cualquier número $-1 \leq y \leq 1$ sale como un valor de $\text{sen } x$ para algún x . Sin embargo, esta función está muy lejos de ser inyectiva: el seno es periódico y sus valores se repiten, por ejemplo, $\text{sen}(\pi n) = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

Para que una función $f: X \rightarrow Y$ tenga inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$, es necesario y suficiente que f sea biyectiva.

3.10.4 Proposición. *Una función $f: X \rightarrow Y$ tiene inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ si y solo si f es biyectiva. En este caso la inversa f^{-1} está definida de manera única.*

Demostración. Queremos probar dos afirmaciones.

- 1) Si f^{-1} existe, entonces f es biyectiva.
- 2) Si f es biyectiva, entonces f^{-1} existe.

En la parte 1), si existe f^{-1} , entonces f es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \implies x_1 = x_2.$$

También es sobreyectiva: para cualquier $y \in Y$ se tiene

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Ahora para la parte 2), supongamos que f es biyectiva. La sobreyectividad significa que para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Además, la inyectividad significa que este x es único. Podemos definir una función $f^{-1}: Y \rightarrow X$ por

$$f^{-1}(y) = x.$$

Esta función funciona como la inversa, y se ve que esta es la única opción para definirla. □

3.11. Gráfica de la función inversa

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva y $f^{-1}: Y \rightarrow X$ su inversa. Si tenemos $f(x) = y$, entonces, aplicando f^{-1} a esta ecuación,

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y).$$

Viceversa, si $x = f^{-1}(y)$, entonces, aplicando f ,

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

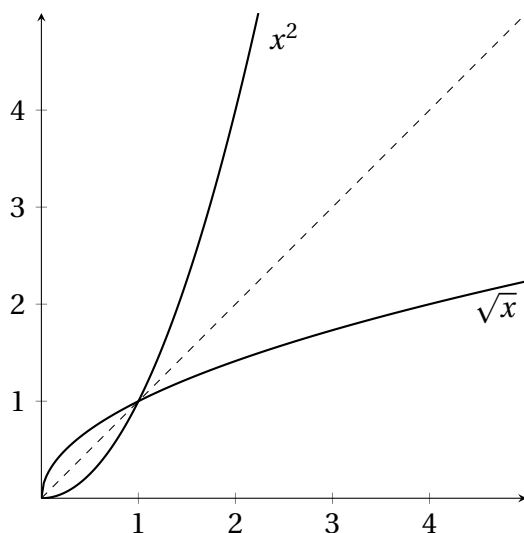
Esto quiere decir que

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

El punto (x, y) está en la gráfica de f si y solamente si (y, x) está en la gráfica de f^{-1} . Intercambiar las coordenadas $(x, y) \iff (y, x)$ es lo mismo que reflejar un punto respecto a la recta $y = x$.

3.11.1 Proposición. La gráfica de f^{-1} es la gráfica de f reflejada respecto a la recta $y = x$.

3.11.2 Ejemplo. Para la función $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$ la inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Así se ven sus gráficas:

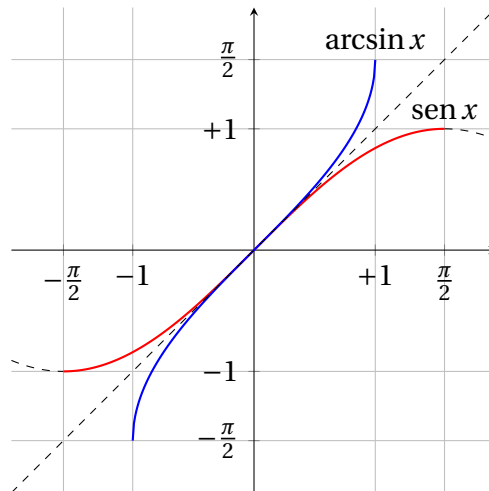


3.11.3 Ejemplo. Para obtener la función inversa al seno $\sin x$, hay que considerarlo en un intervalo donde la función es inyectiva y sobreyectiva. Podemos considerar la función

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, +1], \quad x \mapsto \sin x.$$

Esta sí es biyectiva, y su inversa se llama el **arcoseno**:

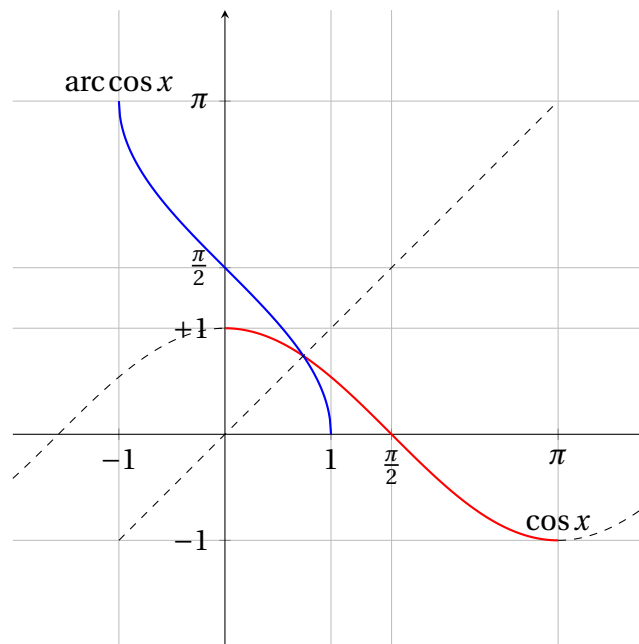
$$\arcsin x: [-1, +1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

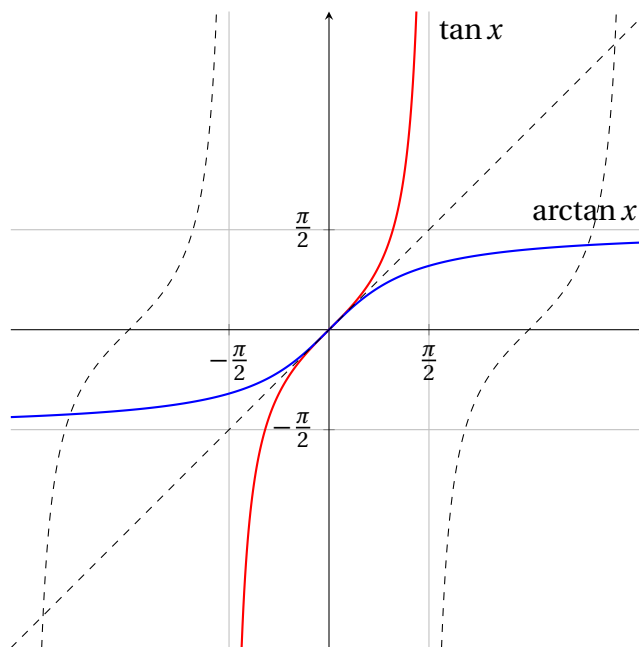


De la misma manera se definen las funciones del **arcocoseno**, **arcotangente**, como las inversas a $\cos x$ y $\tan x$ respectivamente, restringidas para ser biyectivas:

$$\arccos: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right).$$





3.12. Funciones exponenciales

3.12.1 Definición. Para un número fijo $b > 0$ la función $f(x) = b^x$ se llama una función **exponencial**.

Normalmente se pide que $b \neq 1$ porque para $b = 1$ la función es constante: $f(x) = 1$. Revisemos qué significado tiene b^x para x número natural, entero, racional.

- Por la definición,

$$b^0 = 1.$$

- Si $x = n$ es un número natural, entonces

$$b^n = \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ veces}}.$$

- Para los enteros negativos, las potencias se definen como

$$b^{-1} = \frac{1}{b}, \quad b^{-n} = \frac{1}{b^n}.$$

- Para un número racional $\frac{m}{n}$ tenemos

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m.$$

Para definir b^x para cualquier número real x , se puede aproximar x por números racionales y usar la propiedad de los números reales mencionada en [2.1.1](#).

3.12.2 Ejemplo. Para calcular 2^π , donde $\pi = 3,1415926\dots$, podemos considerar las aproximaciones racionales a π :

$$\begin{aligned} 3 &< \pi < 4, \\ 3,1 &< \pi < 3,2, \\ 3,14 &< \pi < 3,15, \\ 3,141 &< \pi < 3,142, \\ &\dots \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} 2^3 &< 2^\pi < 2^4, \\ 2^{3,1} &< 2^\pi < 2^{3,2}, \\ 2^{3,14} &< 2^\pi < 2^{3,15}, \\ 2^{3,141} &< 2^\pi < 2^{3,142}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Los números

$$\begin{aligned} 2^{3,141} &= 8,821353\dots, \\ 2^{3,142} &= 8,827469\dots \end{aligned}$$

se acercan por ambos lados a

$$2^\pi = 8,824977\dots$$

Esta es una justificación teórica; en la práctica, si queremos calcular algo como b^x en la calculadora o computadora, hay que tomar una aproximación decimal de x con suficiente precisión:

$$\begin{aligned} 2^\pi &\approx 2^{3,1415926} \approx 8,824977, \\ 3^{\sqrt{2}} &\approx 3^{1,4142135} \approx 4,728804. \end{aligned}$$

(Para comprobar los cálculos: $3 < \pi < 4$, entonces $8 = 2^3 < 2^\pi < 2^4 = 16$; similarmente, $1 < \sqrt{2} < 2$, entonces $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$.)

La base b también puede ser cualquier número real > 0 .

Así la exponencial es una función definida sobre $\mathbb{R}$. Su imagen es $(0, +\infty)$. Las leyes de exponentes conocidas de la escuela también funcionan para el exponente real x :

3.12.3 Proposición (Leyes de exponentes). *Para $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple*

$$1) \ a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

$$2) a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$

$$3) (a^x)^y = a^{xy},$$

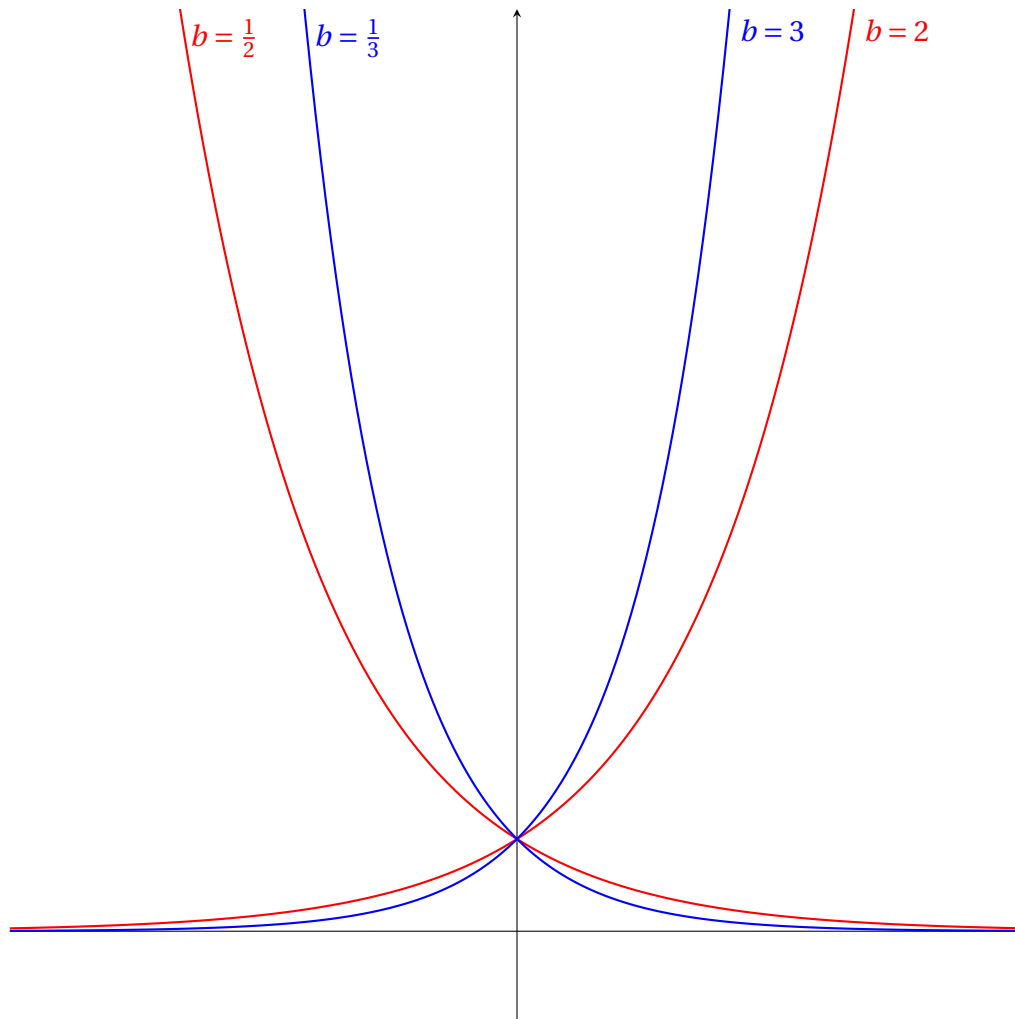
$$4) (ab)^x = a^x b^x.$$

3.12.4 Proposición. Para $0 < b < 1$ la función $f(x) = b^x$ es decreciente sobre $\mathbb{R}$.

Para $b > 1$ la función $f(x) = b^x$ es creciente sobre $\mathbb{R}$.

Para $b = 1$ la función $f(x) = 1^x = 1$ es **constante** (toma el mismo valor en cualquier x).

Tenemos $(\frac{1}{b})^x = b^{-x}$, así que la gráfica para la base $\frac{1}{b}$ se obtiene reflejando la gráfica para la base b respecto al eje y .



Vamos a ver un par de ejemplos de cómo las funciones exponenciales aparecen en los modelos de la vida.

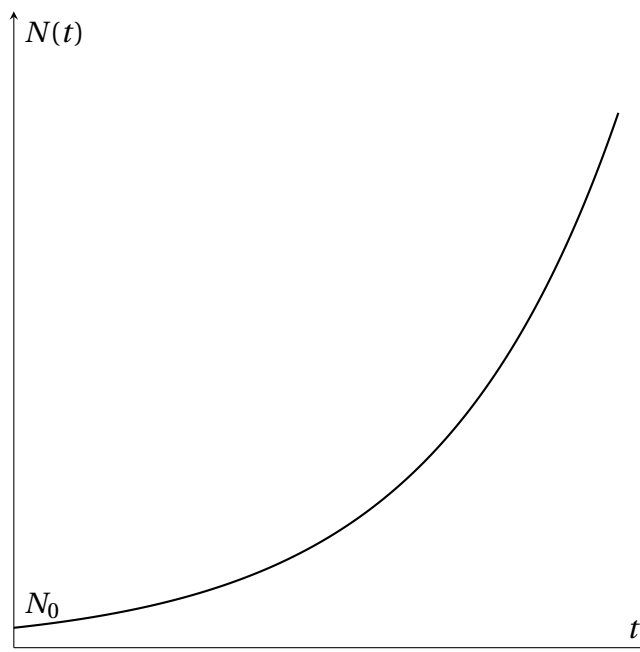
3.12.5 Ejemplo. Supongamos que en una caja de Petri, una bacteria se divide en dos cada 20 minutos. Si N_0 es la cantidad inicial de bacterias, entonces

- en 20 minutos habrá $2N_0$ bacterias,
- en 40 minutos habrá $4N_0$ bacterias,
- en 60 minutos habrá $8N_0$ bacterias,
- etc.

La fórmula para la cantidad en cualquier momento será

$$N(t) = N_0 2^{t/20},$$

donde t es el tiempo transcurrido en minutos.



La función 2^x crece muy rápido con x . En la vida real, el crecimiento de bacterias está limitado por el alimento y espacio disponible.

3.12.6 Ejemplo. Para un material radioactivo su **periodo de semivida** es el tiempo en que se deshace la mitad de cualquier cantidad dada.

Por ejemplo, el Yodo-131 se usa en la medicina para diagnóstico y tratamiento. El periodo de semivida para este material es de 8 días, lo cual quiere decir que si tenemos una cantidad N_0 de Yodo-131, entonces

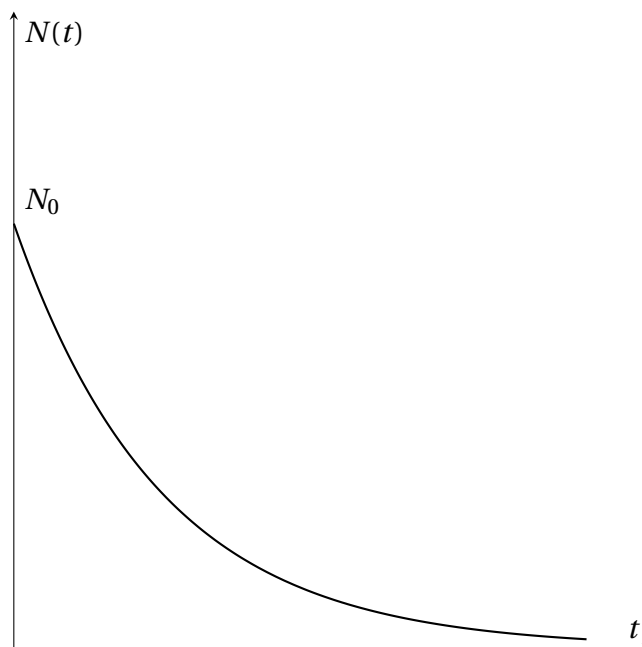
- en 8 días nos queda $\frac{1}{2} N_0$,
- en 16 días nos queda $\frac{1}{4} N_0$,
- en 24 días nos queda $\frac{1}{8} N_0$,

- en 32 días nos queda $\frac{1}{16} N_0$,
- etc.

La fórmula para la cantidad sería

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/8},$$

donde t es el tiempo transcurrido en días.



Los materiales radiactivos y su propiedad de tener una semivida determinada se utilizan en la datación radiométrica en arqueología y geología (para determinar la edad de objetos y rocas), en diagnósticos y tratamientos médicos, etc.

En los últimos dos ejemplos podemos preguntar en qué momento t la cantidad alcanza cierto valor $N = N(t)$. Para conocer la respuesta, nos sirve una función que es inversa a la exponencial.

3.13. Funciones logarítmicas

La exponencial $f(x) = b^x$ para $b > 0$, $b \neq 1$ es biyectiva como una función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty).$$

Como consecuencia, esta tendrá su inversa, que se denomina el logaritmo:

$$f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

3.13.1 Definición. Para $b > 0$, $b \neq 1$, el **logaritmo** es la función inversa a la exponencial $f(x) = b^x$. En otras palabras, tenemos

$$\log_b(x) = y \iff b^y = x;$$

es decir, $\log_b(x)$ es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener x .

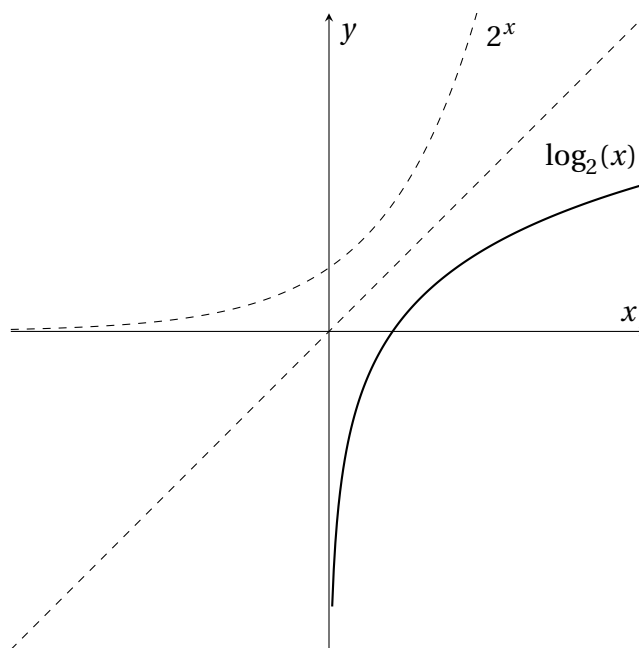
Por la definición,

- $\log_b(b^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
- $b^{\log_b(x)} = x$ para todo $x > 0$.

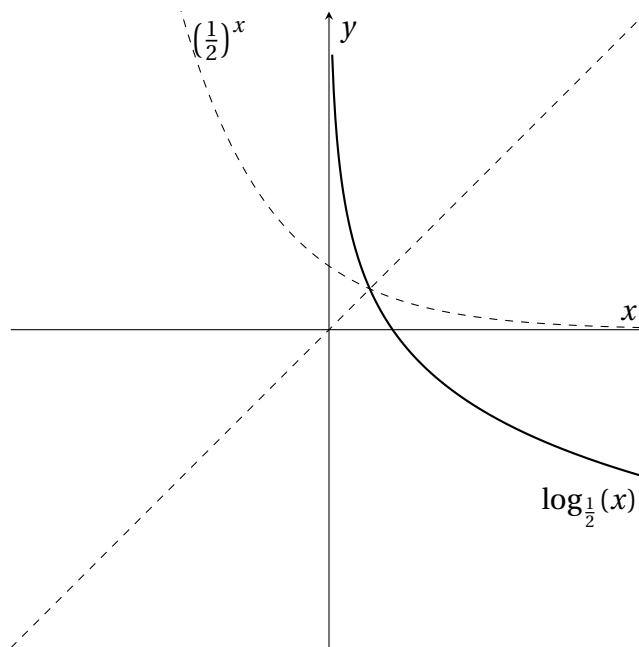
3.13.2 Ejemplo. He aquí algunos valores que se siguen de la definición de logaritmo:

$$\begin{aligned}\log_{10}(1000) &= 3, \\ \log_{10}(0,001) &= -3, \\ \log_2(256) &= 8, \\ \log_3(81) &= 4.\end{aligned}$$

Recordemos que la gráfica de f^{-1} corresponde a la gráfica de f reflejada respecto a la recta $y = x$. Conociendo la gráfica de la función exponencial b^x , podemos graficar $\log_b(x)$. Cuando $b > 1$, la función b^x crece rápido y $\log_b(x)$ crece lento:



Cuando $0 < b < 1$, la función b^x decrece rápido y $\log_b(x)$ decrece lento:



Las leyes de exponentes 3.12.3 implican las leyes correspondientes para los logaritmos.

3.13.3 Proposición (Leyes de logaritmos). *Para $b > 0$, $b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple*

- 1) $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ para $x, y > 0$.
- 2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$ para $x, y > 0$,
- 3) $\log_b(x^c) = c \log_b(x)$ para $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. En la parte 1), $\log_b(x) = u$, $\log_b(y) = v$ significa que $b^u = x$, $b^v = y$. Ahora $b^{u+v} = b^u b^v = xy$, así que $\log_b(xy) = u + v = \log_b(x) + \log_b(y)$. La parte 2) es similar.

En la parte 3), escribiendo $\log_b(x) = u$, tenemos $b^u = x$. Ahora $b^{cu} = x^c$, lo cual significa que $\log_b(x^c) = cu = c \log_b(x)$. $\square$

Resumiendo lo que acabamos de ver: *la exponencial de una suma es el producto de las exponenciales*: $b^{x+y} = b^x b^y$. Para el logaritmo, al ser la función inversa, se cumple lo contrario: *el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos*: $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$.

Otra propiedad importante nos permite expresar el logaritmo de base b en términos de logaritmo de otra base a :

3.13.4 Proposición (Cambio de base de logaritmo). *Para $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ y para cualquier $x > 0$ se tiene*

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\log_b(x) &= y \implies \\ b^y &= x \implies \\ \log_a(b^y) &= \log_a(x) \implies \\ y \log_a(b) &= \log_a(x) \implies \\ y &= \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.\end{aligned}$$

□

3.13.5 Ejemplo. Tenemos

$$\log_2(1000) = \frac{\log_{10}(1000)}{\log_{10}(2)} \approx \frac{3}{0,301} \approx 9,96.$$

Este número está cerca de 10 y de hecho, $2^{10} = 1024$ está cerca de 1000.

3.13.6 Ejemplo. Finalmente, podemos regresar a nuestro ejemplo 3.12.5. Allí escribimos un modelo de crecimiento de bacterias

$$N(t) = N_0 2^{t/20},$$

donde t es el tiempo en minutos.

Para encontrar t tal que $N(t) = N$, es decir, resolver la ecuación

$$N = N_0 2^{t/20},$$

podemos tomar los logaritmos de ambas partes:

$$\log_2(N) = \log_2(N_0 2^{t/20}).$$

Gracias a la fórmula de cambio de base de logaritmo (3.13.4), funcionaría cualquier base, pero tomamos $b = 2$ para simplificar los cálculos porque tenemos la función exponencial $2^{t/20}$ con base 2.

Aplicando las leyes de logaritmos,

$$\log_2(N) = \log_2(N_0) + \frac{t}{20},$$

así que

$$t = 20 (\log_2(N) - \log_2(N_0)) = 20 \log_2\left(\frac{N}{N_0}\right).$$

Por ejemplo, si empezamos con $N_0 = 8$ bacterias y queremos saber en cuánto tiempo habrá $N = 1024$, la respuesta es

$$t = 20 (\log_2(1024) - \log_2(8)) = 20 (10 - 3) = 140 \text{ minutos}.$$

Parte II

Límites y continuidad

Los límites de funciones sirven para estudiar cómo una función $f(x)$ se comporta cuando x está arbitrariamente cerca de algún número a . En §4.1 vamos a dar una idea intuitiva de qué es un límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Luego, en §4.2 a través de ejemplos se explican los límites por la izquierda $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y por la derecha $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, y en §4.3 se ven ejemplos cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. La definición rigurosa de los límites se pospone hasta §4.4, donde se ve la definición en términos de ϵ y δ , y luego en §4.5 se ven los resultados que ayudan a calcular los límites en práctica. En §5 se introduce el concepto de continuidad que se define en términos de límites y juega un papel central en el curso.

4. Límites de funciones

4.1. Introducción a los límites

4.1.1 Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

La función está definida para todo número real x , salvo $x = 1$. Podemos examinar el comportamiento de f cerca de $x = 1$. «Cerca» significa tomar números muy cercanos a 1, ligeramente menores o ligeramente mayores. Calculamos los valores:

x	$f(x)$
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
1,001	2,001
1,01	2,01
1,1	2,1

Se ve que cuando x se acerca a 1, el valor $f(x)$ se acerca a 2. En este caso se dice que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es igual a 2. La notación matemática para esto es

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Este límite se puede explicar con un poco de álgebra: cuando $x \neq 1$, podemos simplificar la expresión de $f(x)$:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

De ahí se obtienen todos los valores para $x \neq 1$.

4.1.2 Ejemplo. Ahora consideremos una función más interesante:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Nuevamente, la función no está definida porque, al sustituir $x = 0$, obtenemos $\frac{0}{0}$. La función está definida en $x \neq 0$. Podemos usar una calculadora para investigar el comportamiento de la función cerca de 0.

x	$f(x)$
-0,3	0,985067
-0,2	0,993346
-0,1	0,998334
0,1	0,998334
0,2	0,993346
0,3	0,985067

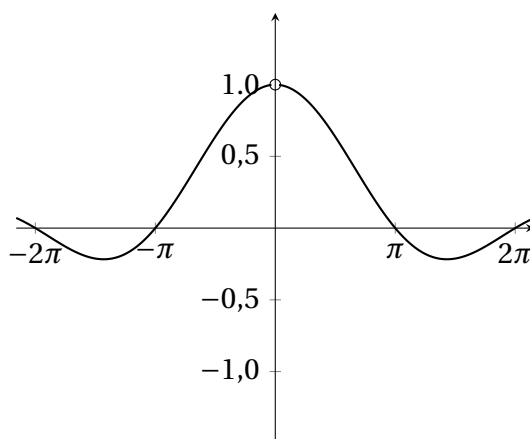
Recordemos que $\text{sen}(x)$ es una función impar, lo cual quiere decir que para todo x se tiene $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, por lo que $f(x)$ es una función par:

$$f(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\text{sen}(x)}{-x} = \frac{\text{sen}(x)}{x} = f(x).$$

Otra vez podemos preguntar cuál es el límite. A partir de estos cálculos podemos conjeturar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Esta es la gráfica de $\frac{\text{sen } x}{x}$ alrededor de 0:



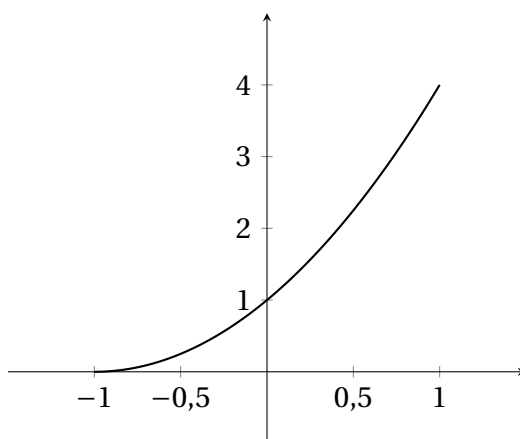
4.1.3 Ejemplo. Ahora consideremos la función $f(x) = (x + 1)^2$. Podemos considerar su límite cuando $x \rightarrow 0$. De nuevo, empezamos con una tabla de valores para x cercano a 0.

x	$f(x)$
-0,1	0,810000
-0,01	0,980100
-0,001	0,998001
0,001	1,002001
0,01	1,020100
0,1	1,210000

De aquí podemos intuir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^2 = 1.$$

Esto era algo esperado: la función está definida en $x = 0$ y se tiene $f(0) = 1$. Su gráfica es la parábola desplazada 1 unidad hacia la izquierda.



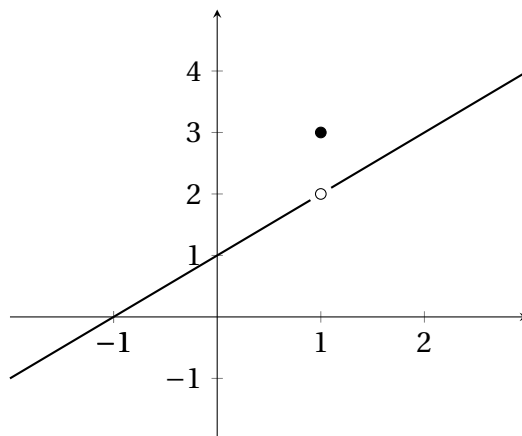
Una función que tiene la propiedad de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ se llama una **función continua**; vamos a estudiarlas más adelante. Hay que tomar en cuenta que en general $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

4.1.4 Ejemplo. Ahora consideremos la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

Esto se llama una **definición por partes**: no hay una única fórmula válida para todo x , sino que se utilizan diferentes expresiones según el valor de x . Consideremos los valores de $f(x)$ para los x cercanos a 1:

x	$f(x)$
0,8	1,8
0,9	1,9
0,99	1,99
1,01	2,01
1,1	2,1
1,2	2,2



Los valores de $f(x)$ se acercan a 2 cuando nos acercamos a $x = 1$:

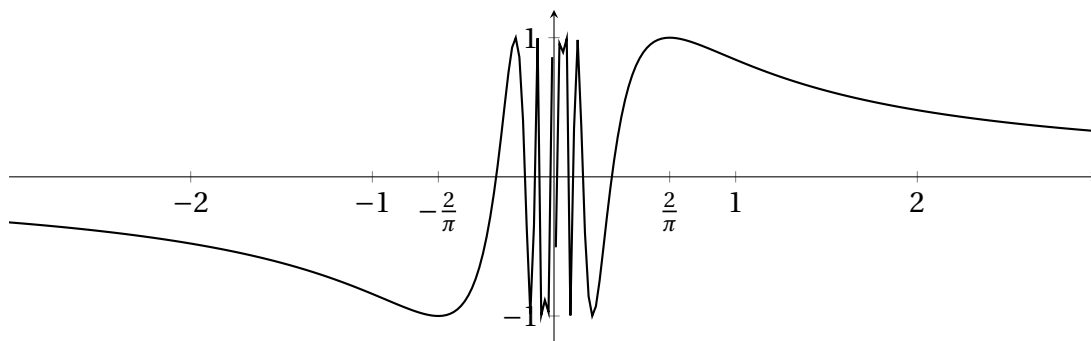
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Sin embargo, por la definición de $f(x)$, tenemos $f(1) = 3$. Así, aunque $f(x)$ está definida en toda la recta real, su límite cuando x tiende a 1 no coincide con el valor $f(1)$. Cuando sucede esto, se dice que la función **no es continua** en $x = 1$.

4.1.5 Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

La función no está definida en $x = 0$. En este caso investigar sus valores para x cercanos a 0 con la calculadora nos daría resultados engañosos: el seno $\sin(x)$ oscila entre -1 y 1 , y cuando x se acerca a 0, el valor de $|1/x|$ se vuelve más y más grande, y al calcular $\sin \frac{1}{x}$ obtendríamos valores entre -1 y 1 que parecen arbitrarios. Así se ve la gráfica de la función:



Cerca de 0 hay infinitos valores de x para los cuales $f(x) = 0$:

$$\sin \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{1}{x} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{1}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

De la misma manera, hay infinitos valores de x para los cuales $f(x) = \pm 1$.

En este caso

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

Después de investigar los ejemplos, podemos dar la definición intuitiva del límite.

4.1.6 Definición (Definición intuitiva). Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca de a . Se dice que $f(x)$ **tiene límite L cuando x tiende al número a** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si se puede hacer que los valores de $f(x)$ se encuentren arbitrariamente cerca de L , tomando valores de x suficientemente cercanos a a (por ambos lados de a), pero no iguales a a .

De los ejemplos que vimos, tenemos los siguientes puntos importantes:

- Si $f(x)$ está definida en $x = a$, *no necesariamente* $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- Puede ser que $f(x)$ no esté definida en $x = a$, pero el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
- El límite puede no existir.

El problema con la definición intuitiva es que no hemos definido con precisión qué significa «suficientemente cerca». Vamos a regresar a este punto y dar una definición rigurosa más adelante.

4.2. Límite por la izquierda y por la derecha

4.2.1 Ejemplo. Consideremos la función de la **parte entera**:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{el número entero mayor } n \text{ tal que } n \leq x.$$

Si $x = n$ es un número entero, entonces $f(x) = n$. Si x no es entero, tenemos

$$\lfloor -1,9 \rfloor = -2,$$

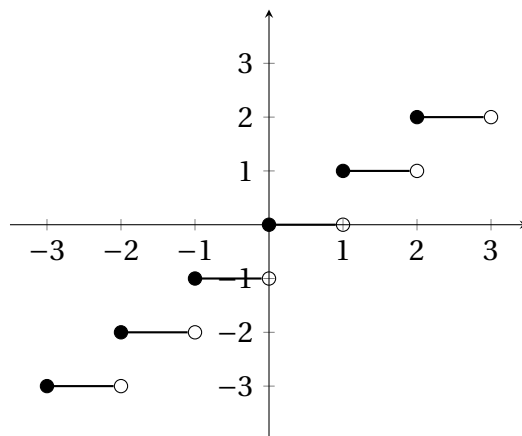
$$\lfloor -0,9 \rfloor = -1,$$

$$\lfloor 0,9 \rfloor = 0,$$

$$\lfloor 1,9 \rfloor = 1,$$

$$\lfloor 2,9 \rfloor = 2,$$

etc. He aquí la gráfica de esta función: es constante entre cada par de enteros consecutivos, y las partes constantes forman una especie de escalera:



Consideremos un punto entero, por ejemplo $x = 1$. Si tomamos los valores de x cercanos a 1 *por la izquierda*, es decir $0 < x < 1$, entonces $f(x) = 0$. Por otra parte, si tomamos los valores cercanos a 1 *por la derecha*, entonces $f(x) = 1$:

x	$f(x)$
0,8	0
0,9	0
0,99	0
1,01	1
1,1	1
1,2	1

En este caso el límite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ *no existe* porque, al acercarnos a $x = 1$ por la izquierda y por la derecha, se obtienen diferentes valores. En este caso se dice que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1.$$

La primera expresión se lee como «el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 por la izquierda» y la segunda se lee como «el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 por la derecha».

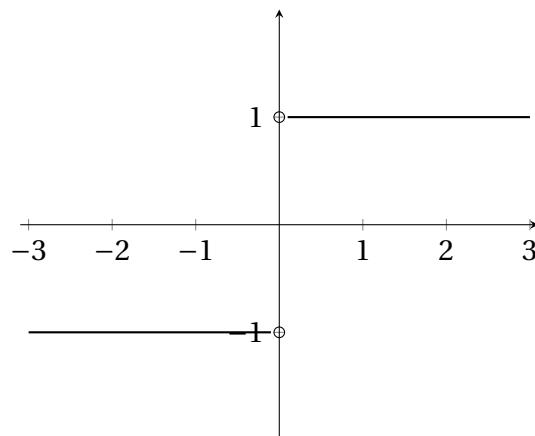
4.2.2 Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Aquí, el valor absoluto $|x|$ está dado por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

De aquí se sigue que

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

y la función no está definida en $x = 0$. Así se ve la gráfica:



En este caso tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1.$$

4.2.3 Definición (Definición intuitiva). Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca de a por la izquierda. Se dice que $f(x)$ **tiene límite L cuando x tiende al número a por la izquierda** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

si se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L , tomando valores de x suficientemente cercanos a a por la izquierda, pero sin que sean iguales a a .

4.2.4 Definición (Definición intuitiva). Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca de a por la derecha. Se dice que $f(x)$ **tiene límite L cuando x tiende al número a por la derecha** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

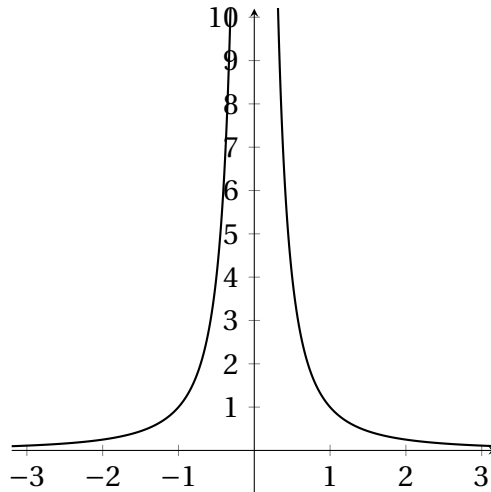
si se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L , tomando valores de x suficientemente cercanos a a por la derecha, pero sin que sean iguales a a .

Notamos que $f(x)$ tiene límite en a precisamente cuando $f(x)$ tiene límite por la izquierda y por la derecha, y ambos coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

4.3. Límites infinitos (asíntotas verticales)

4.3.1 Ejemplo. Ahora consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y su comportamiento alrededor de $x = 0$, donde la función no está definida. Cuando nos acercamos a 0 (por la izquierda o por la derecha), el número x^2 se hace arbitrariamente pequeño, por lo tanto, $\frac{1}{x^2}$ se hace arbitrariamente grande. Esto se ve en la gráfica:

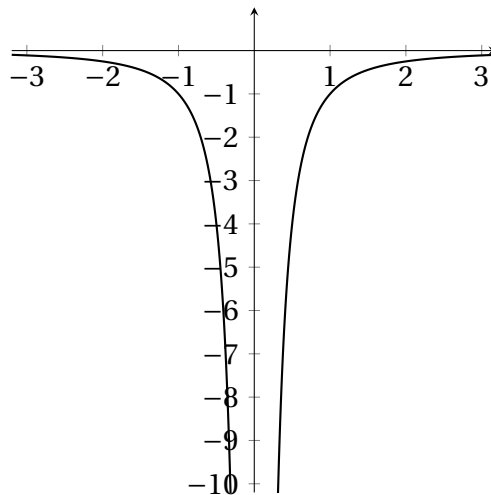


En este caso el límite no existe. Se usa la notación especial

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Esto quiere decir que, cuando nos acercamos a $x = 0$, el valor de la función se hace arbitrariamente grande.

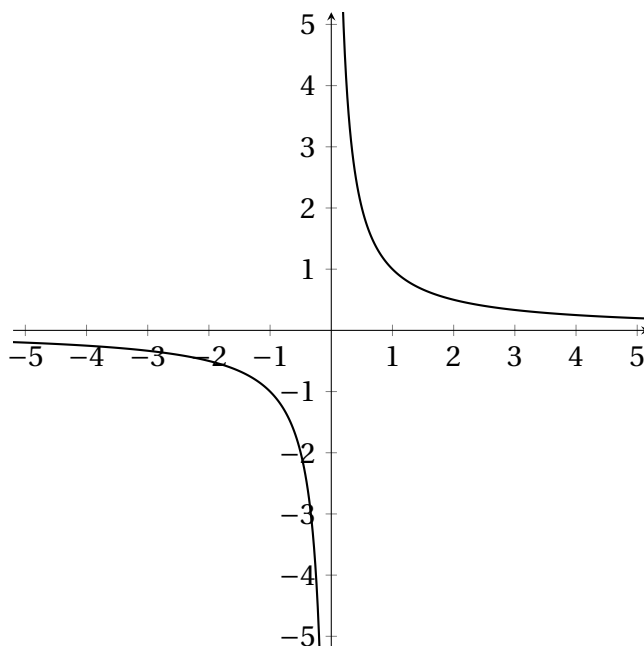
4.3.2 Ejemplo. Ahora consideremos la función del ejemplo anterior, pero con un signo «-»: $f(x) = -\frac{1}{x^2}$. Sus valores son números negativos: $f(x) < 0$, y su gráfica es la misma que la de $f(x)$, pero reflejada respecto del eje x :



En este caso, cuando x se acerca a cero, el valor de $f(x)$ se hace arbitrariamente negativo. El límite no existe, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$

4.3.3 Ejemplo. Ahora investiguemos, de la misma manera, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x se acerca a 0. En este caso $f(x) < 0$ para $x < 0$ y $f(x) > 0$ para $x > 0$ y la gráfica es la hipérbola:



Aquí, el límite cuando x tiende a 0 tampoco existe, pero:

- si nos acercamos a 0 por la izquierda, los valores de $f(x)$ son negativos con magnitud arbitrariamente grande,
- si nos acercamos a 0 por la derecha, los valores son números positivos arbitrariamente grandes.

En este caso escribimos

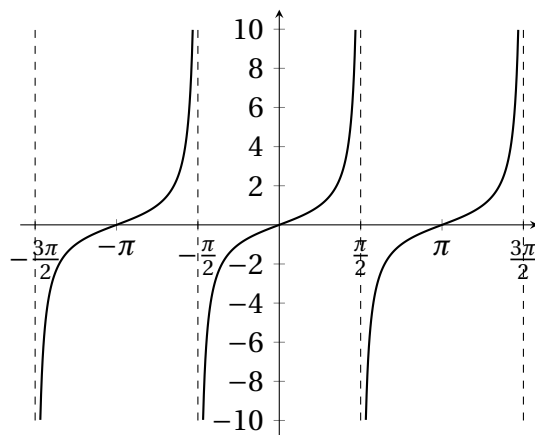
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

4.3.4 Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Es impar: $\tan(-x) = -\tan(x)$. La función no está definida en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$, porque en esos puntos $\cos x = 0$. Como antes, podemos investigar cómo $\tan x$ se comporta cerca de estos puntos. Consideremos $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,570796$ y elaboremos una tabla de valores cerca de este punto.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1,4	0,985449	0,169967	5,797883
1,5	0,997494	0,070737	14,101419
1,57	0,999999	0,000796	1255,765
1,6	0,999573	-0,029199	-34,232532
1,7	0,991664	-0,128844	-7,696602
1,8	0,973847	-0,227202	-4,286261
1,9	0,946300	-0,323289	-2,927097

x	0	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	π
$\text{sen } x$	0	> 0	1	> 0	0
$\text{cos } x$	1	> 0	0	< 0	-1
$\text{tan } x$	0	> 0	no definida	< 0	0

Así se ve la gráfica de la tangente:



Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$

4.3.5 Definición. Se dice que un número a es una **asíntota vertical** para $f(x)$ si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

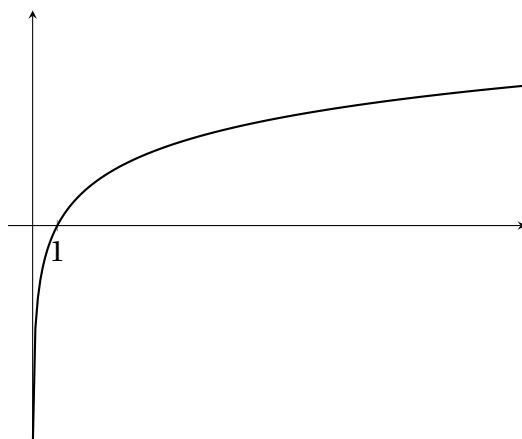
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

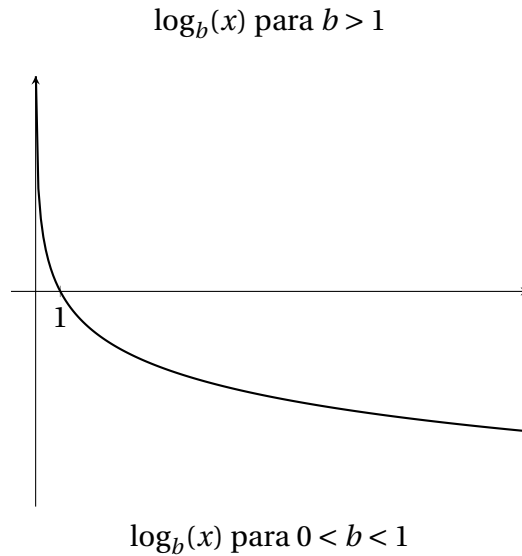
4.3.6 Ejemplo. Otra función conocida que tiene una asíntota vertical es el logaritmo $\log_b(x)$. Esta función está definida para $x > 0$. Si $b > 1$, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b(x) = -\infty.$$

Por otra parte, si $0 < b < 1$, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b(x) = +\infty.$$





Hemos visto varios ejemplos de límites y límites infinitos (por la izquierda, por la derecha, bilaterales). Todavía no hemos dado definiciones rigurosas; este es nuestro próximo objetivo.

4.4. Definición de límites en términos de ϵ - δ

4.4.1 Ejemplo. Nuestra investigación de los límites comenzó en 4.1.1 con la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Tenemos

$$f(x) = x + 1 \text{ si } x \neq 1,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2,$$

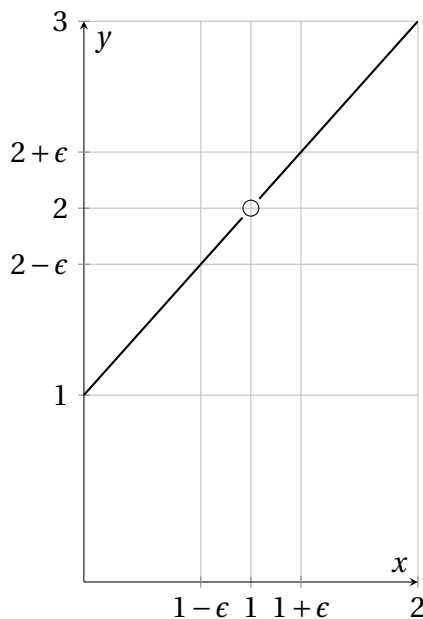
porque los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente cercanos a 2, tomando los valores de x suficientemente cercanos a 1 por la izquierda y por la derecha.

Para hacerlo más preciso, fijemos algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, por ejemplo $\epsilon = 1$. Supongamos que queremos hallar los x tales que los valores correspondientes $f(x)$ estén a distancia $< \epsilon$ del límite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Esta condición se escribe como

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

Sustituyendo $f(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, esto es equivalente a

$$0 < |x - 1| < \epsilon \iff 1 - \epsilon < x < 1 + \epsilon, \quad x \neq 1.$$



Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, los x tales que

$$0 < |x - 1| < \epsilon$$

nos dan valores $f(x)$ que cumplen con.

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

Esto funciona para cualquier $\epsilon > 0$, y en este sentido, tomando ϵ más y más pequeño, x se acerca a 1 y $f(x)$ se acerca a su límite 2.

4.4.2 Ejemplo. Para dar un ejemplo similar, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Cuando x tiende a 1 por la izquierda y por la derecha, el límite es

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3.$$

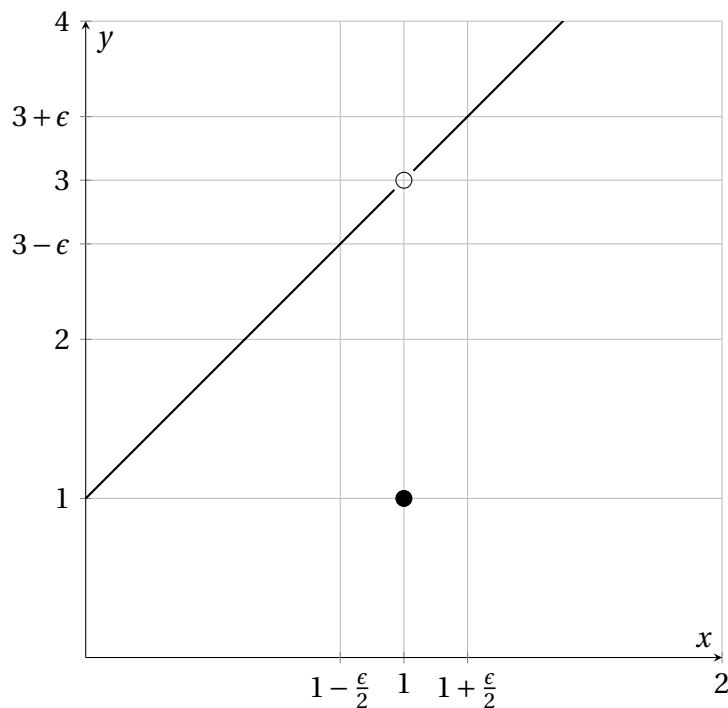
El valor $f(1) = 1$ es irrelevante, para $x \neq 1$, pero cercano a 1, los valores a $2x + 1 = 3$.

Para cualquier $\epsilon > 0$, si tomamos los puntos x suficientemente cercanos a 1:

$$0 < |x - 1| < \frac{\epsilon}{2} \iff 1 - \frac{\epsilon}{2} < x < 1 + \frac{\epsilon}{2},$$

entonces

$$|f(x) - 3| = |(2x + 1) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$



Los últimos ejemplos motivan la definición rigurosa de límite.

4.4.3 Definición. Sea $f(x)$ una función que está definida cerca* de un punto a , excepto posiblemente el mismo a .

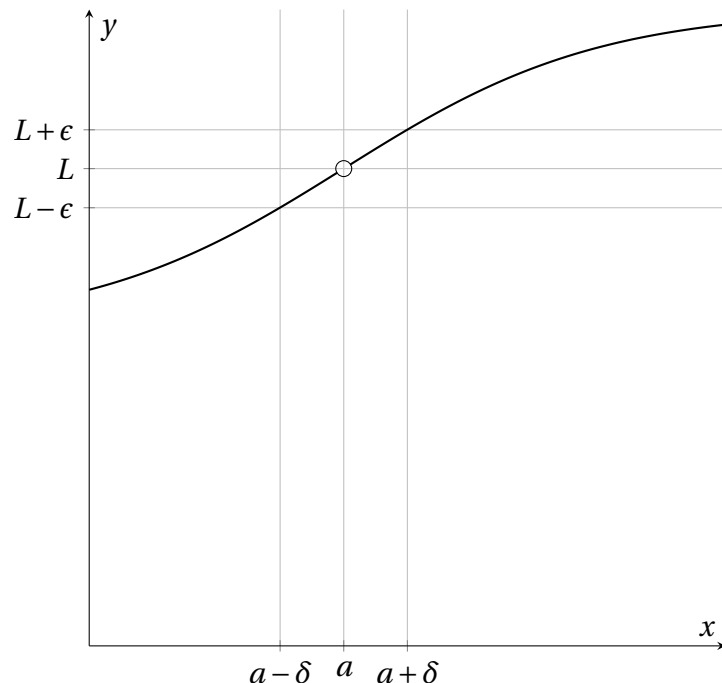
Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \text{o también} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L,$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

*En un intervalo abierto que contiene a a .



La letra griega ϵ se utiliza tradicionalmente para representar una **tolerancia** o un **error**; esta elección está relacionada con la palabra francesa *erreur*. Como un comentario histórico, el cálculo fue descubierto en el siglo XVII, mientras que el concepto preciso del límite en términos de ϵ y δ fue formulado en el siglo XIX.

La condición $0 < |x - a| < \delta$ significa que

$$a - \delta < x < a + \delta \iff x \in (a - \delta, a + \delta), \quad x \neq a, \quad (4.1)$$

mientras que la condición $|f(x) - L| < \epsilon$ significa que

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \iff f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Para obtener la definición del límite por la izquierda y por la derecha, en lugar de (4.1) hay que pedir que $x \in (a - \delta, a)$ y $x \in (a, a + \delta)$ respectivamente.

4.4.4 Definición. Sea $f(x)$ una función que está definida cerca de un punto a (a la izquierda o a la derecha de a), excepto posiblemente el mismo a .

- Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es igual a L** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, \quad \text{o también} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} L,$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$a - \delta < x < a \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

- Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es igual a L** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad \text{o también} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L,$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Con estas definiciones,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

De la misma manera se hacen precisas las definiciones de límites infinitos. Por ejemplo, para decir que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, queremos expresar que los valores $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes tomando los x suficientemente cerca de a .

4.4.5 Definición. Sea $f(x)$ una función definida cerca de a .

- Se dice que $f(x)$ **tiende al infinito cuando x tiende a a** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \text{o también} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty,$$

si para todo $C > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > C.$$

- Se dice que $f(x)$ **tiende a $-\infty$ cuando x tiende a a** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad \text{o también} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty,$$

si para todo $C < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < C.$$

Notamos que en la definición del límite, $\epsilon > 0$ era un número arbitrariamente pequeño. Aquí C es un número arbitrariamente grande o arbitrariamente negativo.

4.4.6 Ejemplo. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Esto quiere decir que para cualquier $C > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > C.$$

Efectivamente, se tiene

$$\frac{1}{x^2} > C \iff x^2 < \frac{1}{C} \iff \sqrt{x^2} < \frac{1}{\sqrt{C}} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Así que podemos tomar $\delta = \frac{1}{\sqrt{C}}$.

Un argumento similar demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$

Para obtener la definición de límites infinitos por la izquierda y por la derecha $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$, de nuevo, en lugar de (4.1) hay que pedir que $x \in (a - \delta, a)$ y $x \in (a, a + \delta)$ respectivamente.

4.5. Cálculo de límites

4.5.1 Teorema (Leyes de límites). *Supongamos que existen los límites*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Entonces,

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ para una constante $c,$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ cuando $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$

Demostración. Pongamos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M. \tag{4.2}$$

El resultado es bastante natural y esperado: si cuando x tiende a a , los valores $f(x)$ y $g(x)$ se acercan a L y M respectivamente, entonces la suma o resta $f(x) \pm g(x)$ debe acercarse a $L \pm M$, el producto $c f(x)$ debe acercarse a $c L$, el producto $f(x) g(x)$ debe acercarse a $L \cdot M$, y el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ debe acercarse a $\frac{L}{M}$.

Para ver cómo razonar con los límites, vamos a ver la prueba de 1). Por la definición de los límites (4.2), para todo $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 &\implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 < |x - a| < \delta_2 &\implies |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces se cumple

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2},$$

y, por lo tanto ^{*},

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto significa que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad \square$$

Las reglas similares funcionan para los límites por la izquierda $\lim_{x \rightarrow a-}$ y por la derecha $\lim_{x \rightarrow a+}$.

Este resultado es muy poderoso: conociendo los límites de algunas funciones elementales, podemos sumar, restar, multiplicar, dividirlos, y conocer los límites respectivos. Para empezar a aplicarlo, necesitamos verificar algunos límites.

4.5.2 Lema. Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquier número real.

1) Para una constante c se cumple $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

2) Se cumple $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

Demostración. Intuitivamente, la función constante $f(x) = c$ siempre toma el mismo valor c , así que su límite en cualquier punto es c . En 2), si x se acerca a a , entonces el valor de $f(x) = x$ se acerca a a .

Para una prueba rigurosa con ϵ y δ , en 1) se cumple $|f(x) - c| = 0 < \epsilon$ para cualquier ϵ , así que funciona cualquier δ , por ejemplo $\delta = 1$. En 2), podemos tomar $\delta = \epsilon$. $\square$

4.5.3 Proposición. Sea

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

una función polinomial. Entonces, para cualquier a se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Demostración. Usando el teorema y lema de arriba,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) &= \\ \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n) + \lim_{x \rightarrow a} (c_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x \rightarrow a} (a_1 x) + \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} a_0}_{=a_0} &= \\ c_n \lim_{x \rightarrow a} x^n + c_{n-1} \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x \rightarrow a} x + a_0 &= \\ c_n \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^n}_{=a} + c_{n-1} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^{n-1}}_{=a} + \cdots + a_1 \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} x}_{=a} + a_0 &= \\ c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a). \quad \square \end{aligned}$$

^{*}Usando la desigualdad $|u + v| \leq |u| + |v|$.

4.5.4 Proposición. Para una función racional $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (donde $f(x)$, $g(x)$ son polinomios) se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a),$$

cuando h está definida en a ; es decir, cuando $g(a) \neq 0$.

Demostración. Por el teorema y el resultado anterior para polinomios,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = h(a). \quad \square$$

Para una función que cumple con la propiedad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, se dice que f es **continua en a** . Acabamos de probar que las funciones polinomiales y racionales son continuas en cualquier $a \in \mathbb{R}$. Hablaremos de las funciones continuas en la siguiente sección. Normalmente, el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no tiene que ser $f(a)$: para empezar, el límite puede existir cuando $f(x)$ no está definida en a .

Anotemos algunos resultados más que sirven para calcular los límites.

4.5.5 Proposición. Supongamos que el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

Este es un caso particular de lo que veremos en la siguiente sección.

4.5.6 Teorema. Si $f(x) \leq g(x)$ para los x suficientemente cerca de a , excepto posiblemente $x = a$, y los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Demostración. Intuitivamente, si $f(x) \leq g(x)$ para todos los x cerca de a , y los valores $f(x)$ y $g(x)$ se acercan a L y M cuando x se acerca a a , entonces debe cumplirse $L \leq M$. $\square$

4.5.7 Teorema (Teorema de compresión o teorema de sándwich). Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para los x cerca de a , excepto posiblemente $x = a$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

4.5.8 Ejemplo. Calculemos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Aquí *no se puede* aplicar la regla $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$, porque el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ no existe (véase 4.1.5).

Lo que podemos notar es que para todo $x \neq 0$ se cumple

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq +1,$$

y luego

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq +x^2.$$

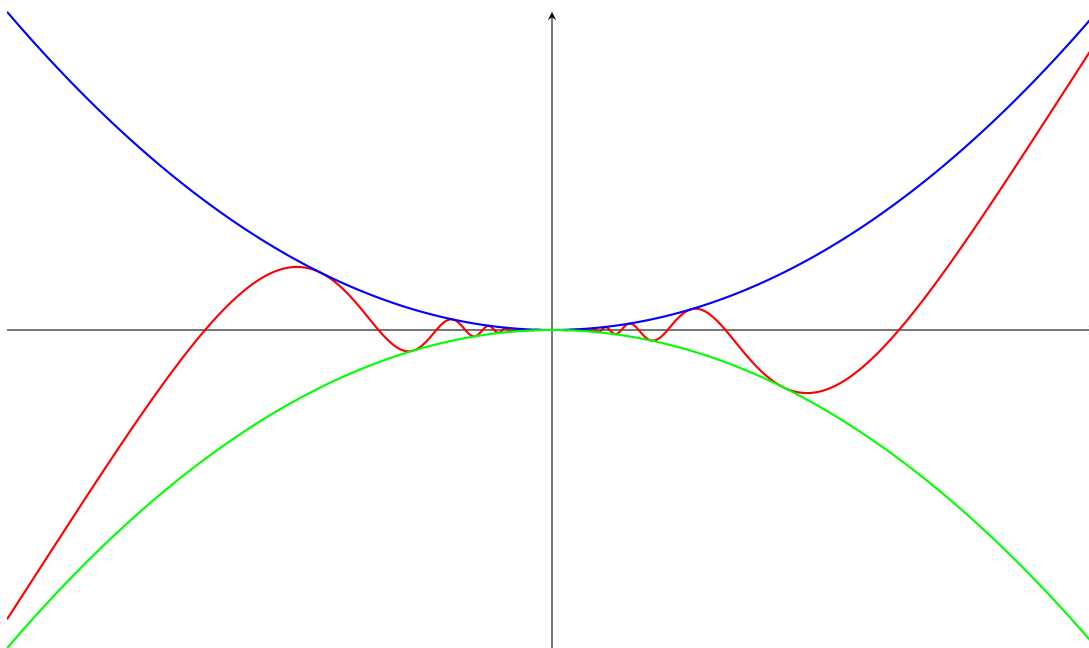
Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \pm x^2 = 0,$$

y luego, por el teorema de compresión,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

La gráfica de las funciones $-x^2$, $x^2 \sin \frac{1}{x}$, y x^2 es la siguiente:



Entonces, aunque $\sin \frac{1}{x}$ no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$, la función $x^2 \sin \frac{1}{x}$ está «comprimida» entre $-x^2$ y x^2 , y su límite sí existe.

Seguimos con algunos cálculos específicos que aplican las leyes de límites [4.5.1](#).

4.5.9 Ejemplo. Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

La función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x = 1$.

Sin embargo podemos cancelar $x - 1$ en el denominador porque para $x \neq 1$ la función coincide con $x + 1$. La definición del límite se trata de lo que sucede cerca de a , no en $x = a$. Por esta razón, en general, si $f(x) = g(x)$ cerca de a , pero no necesariamente en $x = a$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

El último paso $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ es nuestro cálculo de límites para las funciones polinomiales.

He aquí otro cálculo parecido.

4.5.10 Ejemplo. Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{si } x \neq 2, \\ 10, & x = 2. \end{cases}$$

Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2 = 9.$$

Nuevamente, aquí no nos importa el valor de $f(x)$ para $x = 2$, sino su valor cerca de a .

Terminamos por un par de cálculos más interesantes.

4.5.11 Ejemplo. Consideremos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

Aquí *no podemos* aplicar $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{1+2x}-3)}{\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}-2)}$ porque el límite en el denominador nos da 0.

Podemos aplicar el truco que se conoce como «racionalización del numerador»: para deshacerse de la raíz cuadrada en el numerador, multiplicamos el numerador y denominador por $\sqrt{1+2x}+3$. Nos queda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x)-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \\ &= \frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+2 \cdot 4}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Aquí utilizamos la identidad $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

4.5.12 Ejemplo. Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}.$$

Otra vez, no se puede aplicar la regla para $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ porque en este caso $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Sin embargo, como en el ejemplo anterior, podemos multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt{1-2x-x^2} + (1+x)$ y con un poco de álgebra ver qué expresión obtenemos.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x))(\sqrt{1-2x-x^2} + (1+x))}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + (1+x))} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x-x^2 - (1+x)^2}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + (1+x))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(x+2)}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + (1+x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(x+2)}{(\sqrt{1-2x-x^2} + (1+x))} = \\ &= \frac{-2(0+2)}{\sqrt{1}+1} = -2.\end{aligned}$$

5. Funciones continuas

Hemos visto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ cuando f es una función polinomial, o una función racional definida en a . Hay muchas funciones que cumplen con esta propiedad notable, que tiene un nombre especial.

5.0.1 Definición. Se dice que una función f es **continua** en a si

- 1) f está definida en a ,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Cuando f está definida cerca de a , pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f es **discontinua** en a .

De manera similar, se dice que f es continua **por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$).

Casi todas las funciones que conocemos son continuas.

5.0.2 Teorema. Las siguientes funciones son continuas en todo punto donde están definidas:

- 1) funciones polinomiales $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$,
- 2) funciones racionales $\frac{f(x)}{g(x)}$, donde $f(x)$, $g(x)$ son polinomios,
- 3) raíces $\sqrt[n]{x}$,
- 4) funciones trigonométricas $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ etc.,
- 5) funciones exponenciales b^x y logarítmicas $\log_b(x)$.

5.1. Ejemplos de discontinuidades

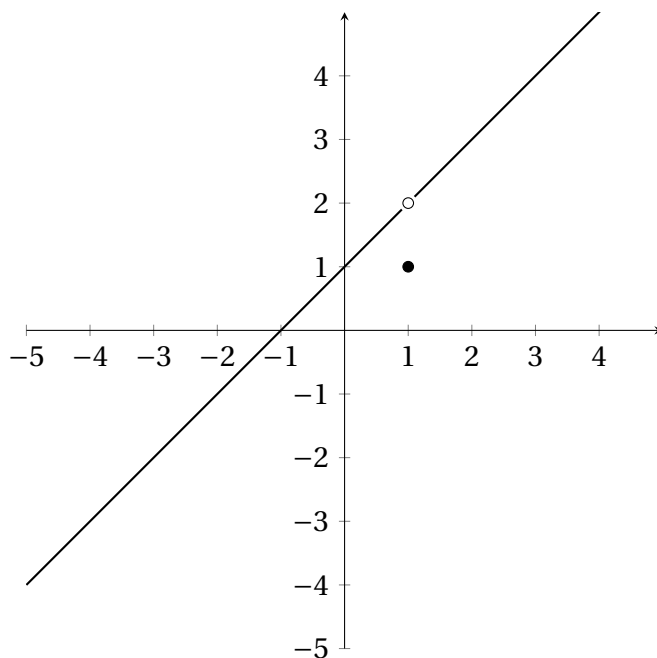
Vamos a ver algunos ejemplos de funciones discontinuas para entender mejor la noción de continuidad.

5.1.1 Ejemplo. Consideremos $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Esta función es continua en todo $a \in \mathbb{R}$, salvo $a = 1$, porque allí la función no está definida. Para $x \neq 1$, tenemos $f(x) = x + 1$.

Pongamos

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

He aquí la gráfica de $g(x)$:



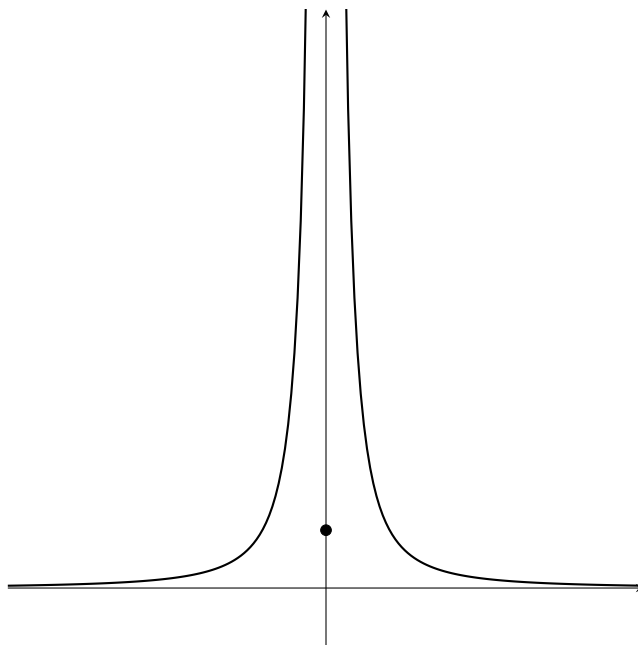
Esta función es continua en todo a , salvo $a = 1$, donde tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 \neq g(1).$$

5.1.2 Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

He aquí su gráfica:



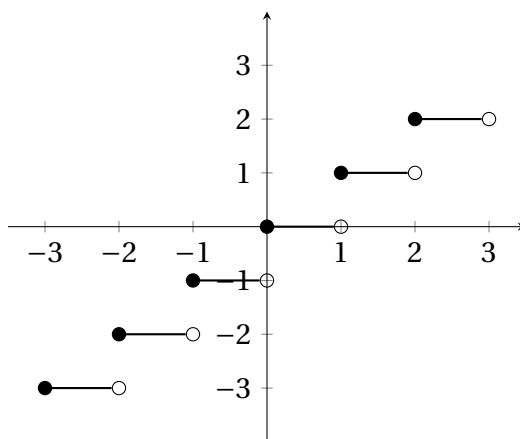
Esta función es discontinua en 0 porque su límite en 0 no existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

5.1.3 Ejemplo. Consideremos la función de la parte entera (véase [4.2.1](#)):

$$f(x) = \lfloor x \rfloor.$$

Esta es su gráfica:



Esta función es discontinua en cualquier número entero $n \in \mathbb{Z}$, porque allí el límite no existe: los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.

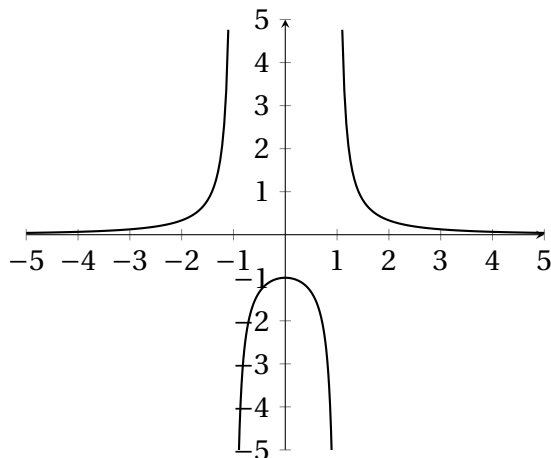
$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1 \neq \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n.$$

5.1.4 Definición. Se dice que f es continua en un intervalo I si f es continua en cada punto de I .

5.1.5 Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)}.$$

He aquí su gráfica:



Esta función no está definida en -1 y 1 , y, por lo tanto, es discontinua en estos puntos. Es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

Resumiendo los ejemplos, una función f es continua en los puntos donde su gráfica no tiene interrupciones.

5.2. Propiedades de funciones continuas

5.2.1 Teorema. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en a , entonces, las siguientes funciones son también continuas en a :

- 1) $f(x) \pm g(x)$,
- 2) $cf(x)$ para una constante c ,
- 3) $f(x) \cdot g(x)$,
- 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$, cuando $g(a) \neq 0$

Demostración. Esta es una consecuencia directa de las leyes de límites (4.5.1). □

5.2.2 Ejemplo. La función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ es continua en todo punto, salvo 0 , donde la función no está definida. Esto se sigue de la continuidad de $\sin x$ y x .

5.2.3 Teorema. 1) Si $f: X \rightarrow Y$ es continua en a y $g: Y \rightarrow Z$ es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es continua en a .

2) Si $f: X \rightarrow Y$ es una función biyectiva continua entre intervalos de $\mathbb{R}$, entonces su inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ es también continua.

5.2.4 Ejemplo. La función $\sin \sqrt{x^3 - 4}$ es continua en todos los puntos donde está definida; es decir, para $x \geq \sqrt[3]{4}$. Esto se sigue de la continuidad de $f(x) = x^3 - 4$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sin x$. Aquí se trata de la composición $h \circ g \circ f$ de estas tres funciones continuas.

5.2.5 Ejemplo. La función exponencial $f(x) = b^x$ es continua. Esto es una consecuencia de su definición para los números reales. La función logarítmica $g(x) = \log_b(x)$ es continua, pues es la inversa de $f(x)$.

Una propiedad importante de las funciones continuas es su buen comportamiento con respecto a los límites.

5.2.6 Teorema. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y g es una función continua en L , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

5.2.7 Ejemplo. Como mencionamos, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ es una función continua en todo punto donde está definida (es decir, en todo $a \in \mathbb{R}$ para n impar y en todo $a \geq 0$ para n par). De aquí se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

5.2.8 Ejemplo. Usando la continuidad de las funciones logarítmicas,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_2\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log_2\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right) = \log_2(1) = 0.$$

5.3. Teorema del valor intermedio

Terminamos por una propiedad importante de las funciones continuas.

5.3.1 Teorema (Teorema del valor intermedio). Supongamos que f es una función continua en un intervalo $I = [a, b]$. Si s es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$:

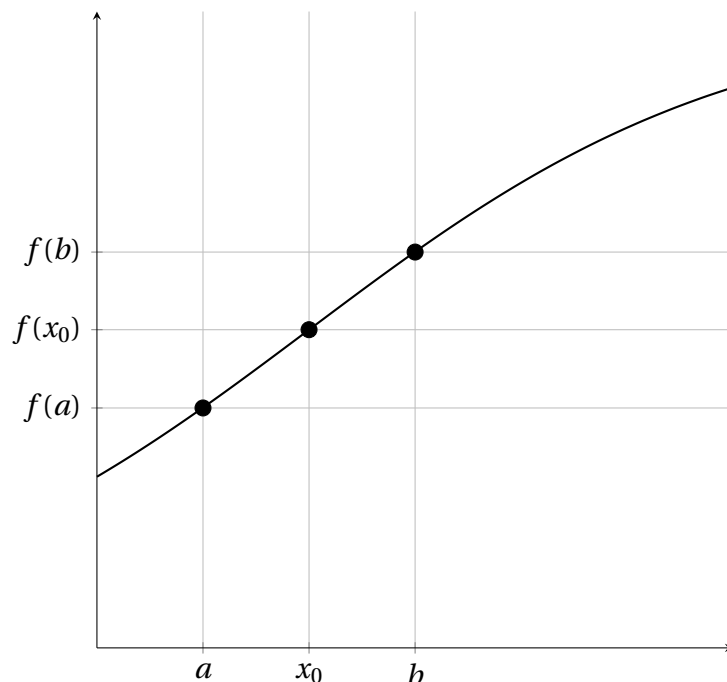
$$f(a) < s < f(b) \quad \text{o} \quad f(a) > s > f(b),$$

entonces, existe un número

$$a < x_0 < b$$

tal que $f(x_0) = s$.

En palabras: si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces entre a y b , la función toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.



La demostración no es muy complicada, pero usa las propiedades de los números reales y se alejaría un poco de nuestros objetivos. Vamos a ver un par de aplicaciones.

5.3.2 Ejemplo. La temperatura del aire, medida en el mismo lugar, es una función continua: no puede haber cambios bruscos, de modo que en un segundo la temperatura salte de 20°C a 25°C (si no, algo anda mal con nuestro termómetro).

Supongamos que a medianoche hacía 10°C y al mediodía 30°C . Por el teorema del valor intermedio, entre la medianoche y mediodía hubo un momento en que la temperatura era exactamente 20°C .

5.3.3 Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Siendo una función polinomial, esta es continua. Calculamos sus valores:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2, \\ f(1) &= -1, \\ f(2) &= -2, \\ f(3) &= -1, \\ f(4) &= 2. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio, existen $0 < x_1 < 1$ y $3 < x_2 < 4$ tales que

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

De hecho, podemos resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 2 = 0$ y confirmar que sus raíces

son

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} = 0,585\dots,$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{2} = 3,414\dots$$

En general, si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ que cambia su signo entre a y b (es decir, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos), entonces f tiene un cero entre a y b : un punto $a < x_0 < b$ tal que $f(x_0) = 0$.

Parte III

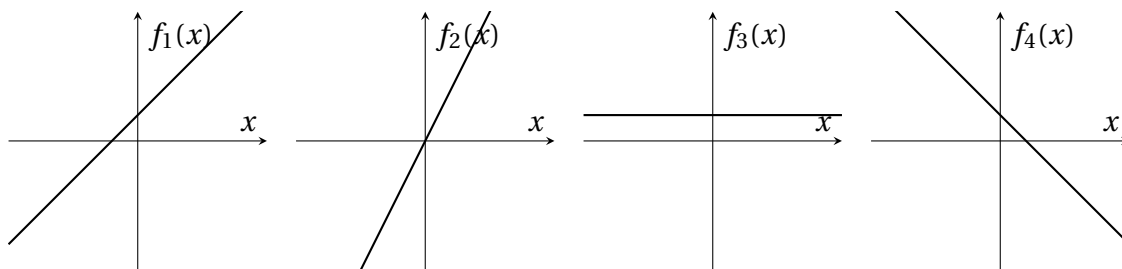
Derivadas

6. Definición y cálculo de las derivadas

6.1. Definición de la derivada

Consideremos las funciones lineales

$$f_1(x) = x + 1, \quad f_2(x) = 2x, \quad f_3(x) = 1, \quad f_4(x) = -x + 1.$$



Se ve que los valores de $f_2(x) = 2x$ crecen más rápido que los valores de $f_1(x) = x + 1$. Por otra parte, la función $f_3(x) = 1$ es constante, y la función $f_4(x) = -x + 1$ decrece.

En general, para una función lineal $f(x) = ax + b$, podemos tomar un número $h \neq 0$ y calcular

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Así, el coeficiente a , conocido como la **pendiente** de la recta $y = ax + b$, determina qué tan rápido crecen los valores. En particular, para $a > 0$ la función es creciente, para $a < 0$ la función es decreciente, y para $a = 0$ la función es constante.

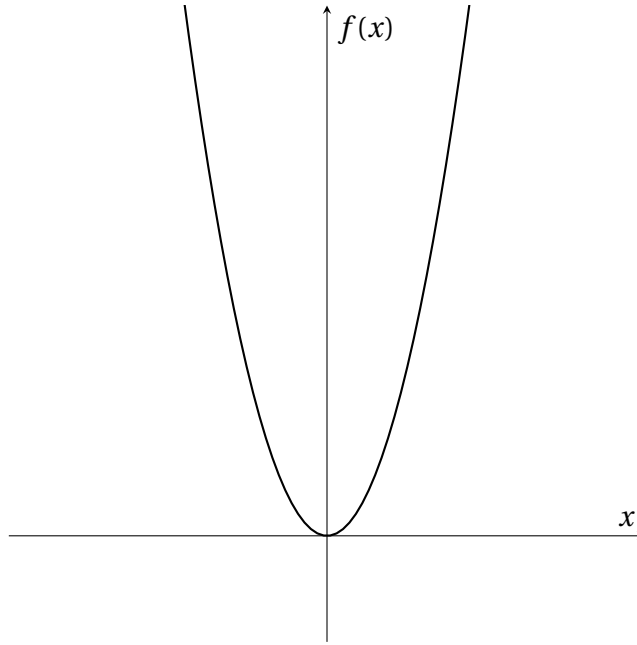
Para las funciones que no son lineales, el asunto es más interesante. Por ejemplo, consideremos $f(x) = x^2$. Para ver qué tan rápido crecen sus valores de x a $x + h$, podemos calcular

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Este número depende de x y también de h . Para ver el crecimiento cerca de x , nos conviene considerar h arbitrariamente pequeño, es decir, pasar al límite $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Notamos que para $x < 0$, este número es negativo, lo cual significa que la función $f(x) = x^2$ decrece cuando $x < 0$. Para $x > 0$, tenemos $2x > 0$, lo cual significa que la función crece. Además, a medida que x aumenta, la función crece más rápido.



6.1.1 Definición. Para una función $f(x)$, su **derivada** se define por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La derivada $f'(x)$ es también una función de x . La función f' está definida en x si f está definida en x y cerca de x (para que $f(x+h)$ y $f(x)$ en la definición tengan sentido), y si el límite existe.

Intuitivamente, la derivada $f'(x)$ nos dice qué tan rápido crecen los valores de $f(x)$ cerca de x . Cuando $f'(x) > 0$, la función crece, y cuando $f'(x) < 0$, la función decrece.

6.1.2 Ejemplo. Como calculamos arriba, para las funciones lineales,

$$(ax + b)' = a,$$

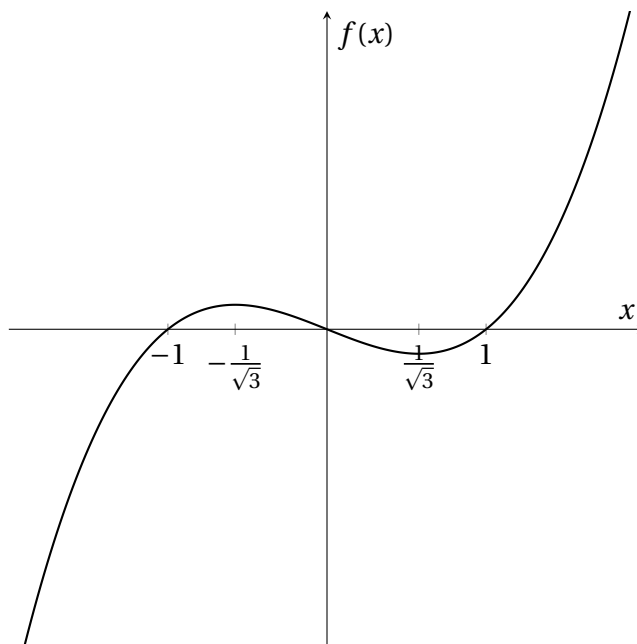
y para $f(x) = x^2$ se tiene

$$(x^2)' = 2x.$$

6.1.3 Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^3 - x$. Su derivada será

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left((x+h)^3 - (x+h)\right) - (x^3 - x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1. \end{aligned}$$

Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ para $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ o $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Esto significa que $f(x)$ crece en los intervalos $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$. Luego, $3x^2 - 1 < 0$ para $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, lo cual significa que $f(x)$ decrece en el intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Esto se observa en la gráfica:



Calculando las derivadas de $f(x) = x^2$ y $x^3 - x$, notamos el patrón y podemos calcular la derivada de $f(x) = x^n$ para cualquier $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

6.1.4 Proposición. $(x^n)' = n x^{n-1}$ para cualquier $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Demostración. Nos interesa calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Las potencias $(x+h)^n$ se calculan con el **teorema del binomio**:

$$\begin{aligned} (x+h)^2 &= x^2 + 2xh + h^2, \\ (x+h)^3 &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3, \\ (x+h)^4 &= x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4, \\ (x+h)^5 &= x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5, \\ &\dots \end{aligned}$$

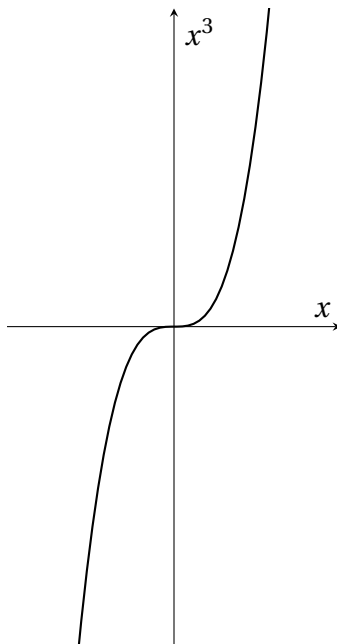
Tenemos

$$(x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + (\text{términos con } h^2, h^3, \dots).$$

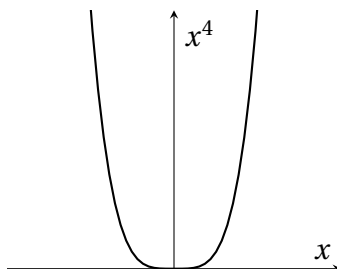
Así

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + n x^{n-1} h + h^2 (\text{algo } \dots) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (n x^{n-1} + h (\text{algo } \dots)) = n x^{n-1}. \quad \square$$

6.1.5 Ejemplo. Para $f(x) = x^3$ tenemos $f'(x) = 3x^2$. Notamos que tenemos $f'(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $f'(0) = 0$, lo cual significa que la función $f(x)$ siempre crece, aunque cuando x se acerca a 0 por la izquierda, el crecimiento se hace más lento, y luego para $x > 0$ la función empieza a crecer más y más rápido:



Para $f(x) = x^4$ la derivada es $f'(x) = 4x^3$. Tenemos $f'(x) < 0$ para $x < 0$, lo que significa que la función decrece para $x < 0$. Por otra parte, $f'(x) > 0$ para $x > 0$, y la función crece para $x > 0$.



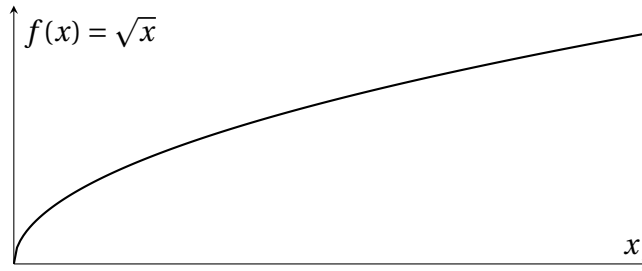
6.1.6 Ejemplo. Calculemos la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.

Tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Esto tiene sentido: tenemos $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ para todo $x > 0$, y efectivamente, la función siempre crece, aunque mientras x se hace más grande, la derivada $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ se hace más pequeña, lo que significa que la función crece más lentamente.



Notamos que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, y tenemos

$$\left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2},$$

así que la fórmula $x^n = n x^{n-1}$ siempre funciona, no solo para $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

6.1.7 Teorema. Se tiene $(x^a)' = a x^{a-1}$ para cualquier número real a .

Demostración. Lo probamos para $n = 1, 2, 3, 4, \dots$; el caso general será justificado más adelante en §6.6. □

6.2. Funciones diferenciables y continuidad

6.2.1 Definición. Cuando la derivada $f'(x)$ está definida en $x = a$, es decir, cuando el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe, se dice que la función f es **diferenciable en a** .

6.2.2 Proposición. Si $f(x)$ es diferenciable en a , entonces es necesariamente continua en a .

Demostración. Recordemos que continuidad en a significa que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

La derivada en $x = a$ puede ser escrita como (tomando $x = a + h$)

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si este límite existe, entonces existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a).$$

Pero $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$, así que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

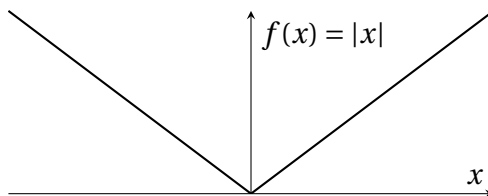
□

Toda función diferenciable es necesariamente continua, pero no se cumple lo contrario: no toda función continua es diferenciable.

6.2.3 Ejemplo. Consideremos la función del valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Esta es la gráfica de $f(x)$:



La función es continua en todo punto. La derivada en $x \neq 0$ es

$$f'(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, en $x = 0$ la función no es diferenciable: allí los límites correspondientes por la izquierda y por la derecha no coinciden:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = -1 \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = +1.$$

6.3. Reglas de derivación

6.3.1 Teorema.

$$(c)' = 0 \text{ para una constante } c, \quad (6.1)$$

$$(c f(x))' = c f'(x) \text{ para una constante } c, \quad (6.2)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (6.3)$$

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x), \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}, \quad (6.5)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}. \quad (6.6)$$

Demostración. Para una función constante $f(x) = c$ tenemos $f(x+h) = f(x) = c$ para cualquier x y h , por ende $f'(x) = 0$.

Las fórmulas $(c f(x))' = c f'(x)$ y $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ son consecuencia directa de las propiedades de los límites. Para el producto por una constante:

$$(c f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c f(x+h) - c f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c f'(x).$$

Para $f(x) \pm g(x)$:

$$\begin{aligned}(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x).\end{aligned}$$

Para calcular la derivada del producto de funciones

$$(f(x) g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x)}{h},$$

aplicamos un truco: sumamos y restamos el mismo término $f(x) g(x+h)$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x+h) + f(x) g(x+h) - f(x) g(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= f'(x) g(x) + f(x) g'(x).\end{aligned}$$

Aquí usamos que $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ debido a la continuidad de g (si no es continua, la derivada $g'(x)$ no existe).

Luego, calculamos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f(x)} \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h f(x) f(x+h)} = \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) f(x+h)} = - \frac{f'(x)}{f(x)^2}.\end{aligned}$$

Finalmente, la fórmula para $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$ es una consecuencia de las fórmulas anteriores para el producto de funciones y para $\left(\frac{1}{g(x)} \right)'$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}. \quad \square\end{aligned}$$

6.3.2 Ejemplo. Gracias a nuestro cálculo $(x^n)' = n x^{n-1}$ y a las fórmulas $(c f(x))' = c f'(x)$ y $(f(x) + f(g))' = f'(x) + g'(x)$, sabemos calcular la derivada de cualquier función polinomial. Por ejemplo, para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ la derivada será

$$f'(x) = (5x^3 - 2x^2 + 4x + 5)' = (5x^3)' - (2x^2)' + (4x)' + (5)' = 5(x^3)' - 2(x^2)' + 4(x)' + 0 = 15x^2 - 4x + 4.$$

6.3.3 Ejemplo. Para $f(x) = \frac{1}{x}$ calculamos

$$f'(x) = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

También podemos escribir $\frac{1}{x} = x^{-1}$, y con la fórmula $(x^n)' = n x^{n-1}$, tenemos $(x^{-1})' = -x^{-2}$. Esta fórmula también es válida para $n < 0$.

6.3.4 Ejemplo. Conociendo las derivadas de polinomios y usando la fórmula para $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$, podemos calcular las derivadas de funciones racionales (cocientes de polinomios).

Calculemos la derivada de $h(x) = \frac{x^2+x+1}{2x-1}$. Pongamos $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x - 1$. Primero calculamos

$$f'(x) = 2x + 1, \quad g'(x) = 2.$$

Ahora

$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{(2x+1)(2x-1) - 2(x^2+x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 3}{4x^2 - 4x + 1}.$$

6.4. Derivadas de las funciones trigonométricas

6.4.1 Proposición. Para el seno y el coseno las derivadas son

$$(\sen x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sen x.$$

Demostración. Por la definición de la derivada, si $f(x) = \sen x$, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sen(x+h) - \sen x}{h}.$$

Podemos usar la identidad trigonométrica

$$\sen(x+h) = \sen x \cos h + \cos x \sen h.$$

Sustituyendo, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sen x \cos h + \cos x \sen h - \sen x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sen x (\cos h - 1) + \cos x \sen h}{h} = \\ &= \sen x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \cos x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sen h}{h}}_{=1} = \cos x. \end{aligned}$$

Aquí usamos el límite especial $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, y también otro límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ que puede ser deducido del primero usando las identidades trigonométricas.

Para $f(x) = \cos x$ la demostración de que $f'(x) = -\sin x$ es similar, usando la identidad trigonométrica

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h. \quad \square$$

Para recordar los signos en $(\sin x)' = +\cos x$ y $(\cos x)' = -\sin x$:

x	0	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	crece	1
$\cos x$	1	decrece	0

6.4.2 Corolario. Para la función tangente la derivada es

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Aquí usamos los cálculos anteriores $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ y la identidad (el teorema de Pitágoras) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. $\square$

6.5. Derivada de la composición de funciones (la regla de la cadena)

6.5.1 Proposición (La regla de la cadena). Para la composición de dos funciones se tiene

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x).$$

Aquí $g'(f(x))$ denota la derivada $g'(x)$ de $g(x)$ donde en lugar de x se sustituye $f(x)$, y $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$.

Demostración. Por la definición,

$$(g(f(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}.$$

Multiplicando el numerador y denominador por $f(x+h) - f(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(f(x+h)) - g(f(x)))(f(x+h) - f(x))}{h(f(x+h) - f(x))} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= g'(f(x)) f'(x). \end{aligned}$$

Este argumento asume que $f(x+h) - f(x) \neq 0$ para h suficientemente pequeño, pero lo vamos a aceptar para los propósitos de este curso. $\square$

6.5.2 Ejemplo. Calculemos la derivada de $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Esta es la composición $g(f(x))$ para $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x^2 + 1$. Tenemos

$$g'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x.$$

Entonces,

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

6.5.3 Ejemplo. Calculemos la derivada de $h(x) = \sin(x^3)$. Esta es la composición $g(f(x))$ para $g(x) = \sin(x)$, $f(x) = x^3$. Calculamos:

$$g'(x) = \cos x, \quad f'(x) = 3x^2,$$

entonces,

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = 3x^2 \cos(x^3).$$

6.5.4 Ejemplo. Para $h(x) = \cos^3 x$ escribimos $h(x) = g(f(x))$, donde $g(x) = x^3$ y $f(x) = \cos x$. Ahora

$$g'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = -\sin x.$$

Entonces,

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3 \cos^2 x \sin x.$$

Con la regla de la cadena, podemos calcular las derivadas de funciones inversas.

6.5.5 Proposición. Si una función $f(x)$ tiene inversa $f^{-1}(x)$, entonces

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Demostración. Por la definición de $f^{-1}(x)$, se cumple

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Calculando las derivadas de ambos lados, se obtiene

$$f'(f^{-1}(x)) (f^{-1})'(x) = 1. \quad \square$$

6.5.6 Ejemplo. Para la función $f(x) = x^3$ la inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Tenemos $f'(x) = 3x^2$, y entonces

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

También podemos calcular directamente

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

6.6. Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

Para calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = b^x$, nos sirve considerar una base muy especial

$$e = 2,718281828\dots$$

Este número se conoce como **número de Euler**. Igual que el número $\pi = 3,1415926\dots$, es una constante fundamental en las matemáticas.

Cuando e es la base de la función exponencial, la derivada cumple con la siguiente propiedad espectacular.

6.6.1 Teorema. *Se cumple*

$$(e^x)' = e^x.$$

No vamos a probar este teorema porque en realidad, este resultado se usa para *definir* en primer lugar qué es el número e . En general, si queremos calcular la derivada de cualquier función exponencial, sirve escribir

$$f(x) = b^x = (e^{\log_e(b)})^x = e^{\log_e(b)x}.$$

6.6.2 Definición. El logaritmo de base e se llama el **logaritmo natural** y se denota por

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

Las leyes de logaritmos nos dan

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

6.6.3 Proposición. *Tenemos*

$$(b^x)' = \ln(b) b^x.$$

Demostración. Escribimos

$$b^x = e^{\ln(b)x}.$$

Esta es la composición $g(f(x))$ de $g(x) = e^x$ y $f(x) = \ln(b)x$. Ahora

$$g'(x) = (e^x)' = e^x, \quad f'(x) = (\ln(b)x)' = \ln(b),$$

así que por la regla de la cadena,

$$(b^x)' = g'(f(x)) f'(x) = e^{\ln(b)x} \cdot \ln(b) = \ln(b) b^x.$$

□

Notamos que

- si $b > 1$, entonces $\ln(b) > 0$, y entonces $(b^x)' > 0$, lo que significa que $f(x) = b^x$ crece;
- si $0 < b < 1$, se tiene $\ln(b) < 0$, y entonces $(b^x)' < 0$, lo que significa que $f(x) = b^x$ decrece.

6.6.4 Ejemplo. Calculamos la derivada de $h(x) = 2^{x^2+x+1}$. Primero, escribimos $h(x) = g(f(x))$ para $g(x) = 2^x$ y $f(x) = x^2 + x + 1$. Calculamos sus respectivas derivadas:

$$g'(x) = \ln(2) 2^x, \quad f'(x) = 2x + 1.$$

Entonces,

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = \ln(2) (2x + 1) 2^{x^2+x+1}.$$

6.6.5 Proposición. Para las funciones logarítmicas se cumple

$$\begin{aligned} (\ln(x))' &= \frac{1}{x}, \\ (\log_b(x))' &= \frac{1}{x \ln(b)}. \end{aligned}$$

Demostración. Para la función $f(x) = b^x$ la inversa es el logaritmo $f^{-1}(x) = \log_b(x)$. Entonces,

$$(\log_b(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\ln(b) b^{\log_b x}} = \frac{1}{\ln(b) x}.$$

En particular, para $b = e$ tenemos $\ln(e) = 1$, y $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$. □

Notamos que

- si $b > 1$, entonces $\ln(b) > 0$ y $(\log_b(x))' > 0$, lo que significa que $\log_b(x)$ crece;
- si $0 < b < 1$, entonces $\ln(b) < 0$ y $(\log_b(x))' < 0$, lo que significa que $\log_b(x)$ decrece.

Conociendo las derivadas de e^x y $\ln(x)$, podemos probar la fórmula

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

para cualquier número real a . Escribimos

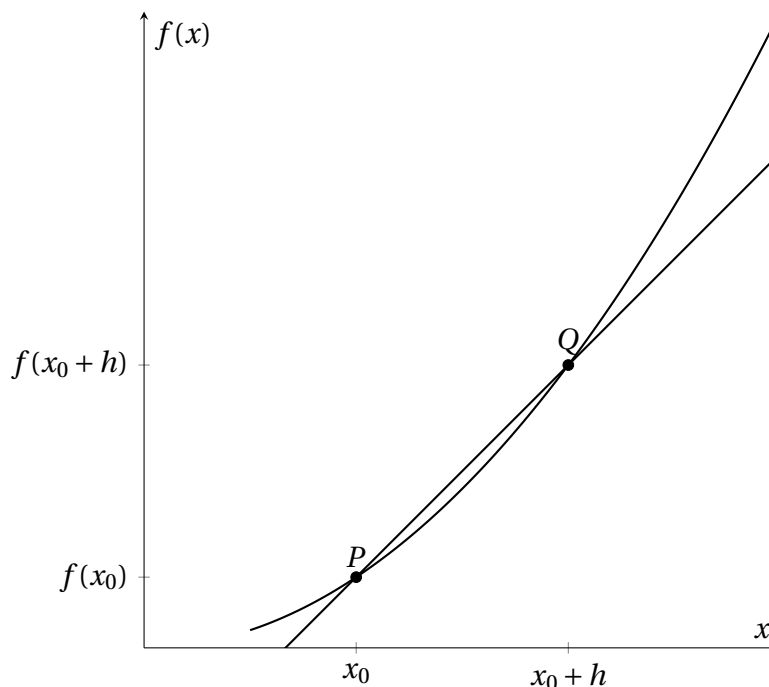
$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln(x)}.$$

Utilizando la regla de la cadena,

$$(x^a)' = \left(e^{a \ln(x)} \right)' = e^{a \ln(x)} (a \ln(x))' = e^{a \ln(x)} \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

6.7. Derivada y la recta tangente a la gráfica

Consideremos la gráfica de una función $f(x)$. Un punto en la gráfica tiene coordenadas $P = (x_0, f(x_0))$ para algún x_0 . Podemos tomar otro punto $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ y trazar la recta que pasa por P y Q . Esta se llama la **secante**, por intersectar la gráfica en dos puntos.



Escribiendo la ecuación de la recta como $y = ax + b$, la pendiente de la recta secante es

$$a = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tomando $h \rightarrow 0$, el punto Q se acerca arbitrariamente al punto P , y la recta que pasa por P y Q se acerca a la recta que toca la gráfica en el punto P , llamada la **tangente** en P . Su pendiente es el límite

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

que no es otra cosa que el valor de la derivada $f'(x_0)$.

6.7.1 Definición. La **recta tangente** a la gráfica de $f(x)$ en un punto $P = (x_0, f(x_0))$ es la recta que pasa por P con pendiente $f'(x_0)$.

Vamos a ver un par de ejemplos de cómo se encuentra la recta tangente.

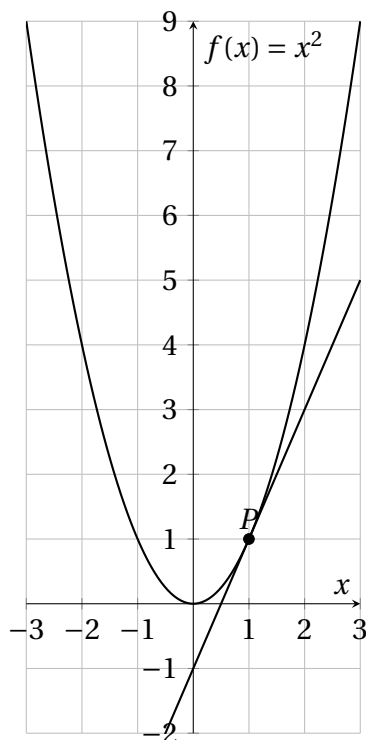
6.7.2 Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^2$ y el punto $P = (1, 1)$ en la gráfica. Tenemos $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = 1$. Escribimos la ecuación de la recta tangente como $y = ax + b$. Para encontrar la pendiente a , calculamos la derivada $f'(x) = 2x$. Entonces, la pendiente es

$$a = f'(x_0) = f'(1) = 2.$$

Para encontrar el término constante b , usamos que la recta pasa por P :

$$y_0 = 2x_0 + b \implies b = y_0 - 2x_0 = 1 - 2 \cdot 1 = -1.$$

Entonces, la recta tangente es $y = 2x - 1$.



6.7.3 Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \frac{2}{x}$ y el punto en la gráfica $P = (1, 2)$. Tenemos $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = 2$. La derivada es

$$f'(x) = (2x^{-1})' = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}.$$

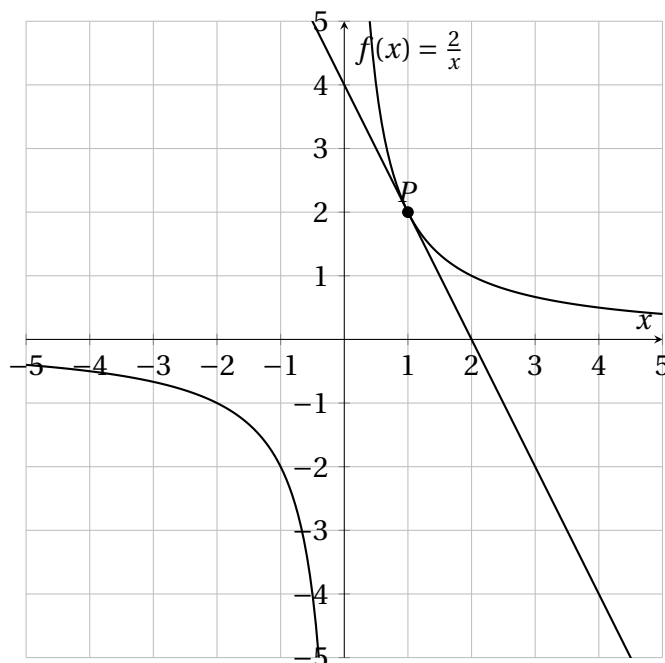
La pendiente de la recta tangente $y = ax + b$ es entonces

$$a = f'(x_0) = f'(1) = -2.$$

Encontramos el término constante

$$y_0 = -2x_0 + b \implies b = y_0 + 2x_0 = 2 + 2 \cdot 1 = 4.$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente es $y = -2x + 4$.



6.8. Aproximaciones lineales

En los ejemplos de arriba se ve que si estamos muy cerca del punto $P = (x_0, f(x_0))$, la recta tangente $y = ax + b$ está muy cerca de la gráfica de $f(x)$. Escribiendo

$$y_0 = f(x_0), \quad a = f'(x_0),$$

podemos encontrar la fórmula general para el término constante b :

$$y_0 = ax_0 + b \implies b = y_0 - ax_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

El hecho de que la gráfica de $f(x)$ alrededor de P está muy cerca de la recta tangente puede ser escrito como

$$f(x) \approx ax + b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La fórmula

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{para } x \text{ cerca de } x_0$$

se llama la **aproximación lineal** de $f(x)$ cerca de x_0 .

6.8.1 Ejemplo. Supongamos que queremos calcular el valor aproximado de $\sqrt{101}$.

Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$. Su derivada es

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Conociendo que $\sqrt{100} = 10$, nos conviene tomar $x_0 = 100$.

Tenemos

$$f(x_0) = \sqrt{100} = 10, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}.$$

Entonces, la aproximación lineal para los x cerca de $x_0 = 100$ es

$$\sqrt{x} \approx 10 + \frac{1}{20}(x - 100).$$

Sustituyendo $x = 101$,

$$\sqrt{101} \approx 10 + \frac{1}{20} = 10,05.$$

Este valor está muy cerca de $\sqrt{101} = 10,0498756\dots$

6.8.2 Ejemplo. Para calcular $\sin x$ para ángulos pequeños x , sirve la aproximación lineal de $f(x) = \sin x$ cerca de $x_0 = 0$. Tenemos

$$f(x_0) = \sin 0 = 0, \quad f'(x_0) = \cos 0 = 1.$$

Entonces, la aproximación lineal es

$$\sin x \approx x$$

para x cerca de 0 (medido en radianes). Esto explica el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Para dar un ejemplo concreto, supongamos que nos interesa el valor aproximado de $\sin 5^\circ$. Primero necesitamos hacer la conversión a radianes:

$$5^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 5 = \frac{\pi}{36} = 0,087266\dots$$

Y efectivamente, este número está cerca de

$$\sin \frac{\pi}{36} = 0,087155\dots$$

así que la aproximación $\sin x \approx x$ funciona.

6.9. Derivadas de orden superior

6.9.1 Definición. La **segunda derivada** de una función es la derivada de su derivada:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

La segunda derivada tiene la siguiente interpretación física: si $s(t)$ es la posición de un objeto, entonces la primera derivada se conoce como la **velocidad**:

$$v(t) = s'(t),$$

y la segunda derivada es la **aceleración**:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

De la misma manera se pueden definir la **tercera derivada**

$$f'''(x) = (f''(x))',$$

la **cuarta derivada**

$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))',$$

la **quinta derivada**

$$f^{(5)}(x) = (f^{(4)}(x))',$$

etc. A partir de $n = 4$ normalmente se escribe $f^{(n)}(x)$ en lugar de poner $f^{(n)}(x)$.

6.9.2 Ejemplo. Consideremos la función polinomial

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 1.$$

Sus derivadas son las siguientes:

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 5,$$

$$f''(x) = 12x - 2,$$

$$f'''(x) = 12,$$

$$f^{(4)}(x) = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = 0,$$

...

En general, si el grado del polinomio es n , las derivadas a partir de $f^{(n+1)}(x)$ serán nulas.

6.9.3 Ejemplo. La función $f(x) = e^x$ tiene la propiedad notable que todas sus derivadas son iguales a e^x :

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x.$$

6.9.4 Ejemplo. Para el logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$, calculamos:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x}, \\f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\f'''(x) &= \frac{2}{x^3}, \\f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4}, \\f^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5}, \\f^{(6)}(x) &= -\frac{120}{x^6}, \\&\dots\end{aligned}$$

Los signos $\pm$ se alternan, y los números que salen son $6 = 2 \cdot 3$, $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, etc.

6.10. Perspectiva: aproximaciones con las derivadas superiores

Las derivadas de orden superior tienen la siguiente aplicación importante en matemáticas. Hemos visto la fórmula para la aproximación lineal:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{para } x \text{ cerca de } x_0.$$

Si x no está suficientemente cerca de x_0 , la aproximación lineal no será adecuada. Sin embargo, con la segunda derivada se puede tomar la **aproximación cuadrática**:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2,$$

con la tercera derivada se puede tomar la **aproximación cúbica**

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3,$$

etc. En general, la fórmula es

$$\begin{aligned}f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \\ \frac{1}{120} f^{(5)}(x_0)(x - x_0)^5 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.\end{aligned}$$

Aquí $n!$ denota el **factorial**, el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$. Estos números crecen muy rápido con n , así que los términos $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ mejoran la aproximación por cantidades cada vez más pequeñas. Esto funciona para funciones razonables $f(x)$.

Las calculadoras y computadoras implementan las operaciones aritméticas básicas como la suma, resta, multiplicación y división, y luego usan este tipo de fórmulas para calcular con la precisión deseada las funciones como $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(x)$, etc.

En las matemáticas, las mismas fórmulas con un número infinito de términos (tomando las derivadas $f^{(n)}(x_0)$ para todo n) se usan para definir en el primer lugar las funciones y deducir sus propiedades.

6.10.1 Ejemplo. Para $f(x) = e^x$ consideramos $x_0 = 0$. Tenemos $f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1$ para todo n , así que

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$$

En particular, tomando $x = 1$, se obtiene la fórmula

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

Sumando suficientes números $\frac{1}{n!}$, podemos aproximar arbitrariamente cerca la constante $e = 2,718281828\dots$