

Álgebra lineal

28 de agosto de 2026

Índice

1. Sistemas de ecuaciones lineales	2
1.1. Ecuaciones lineales en dos variables	2
1.2. Ecuaciones en tres variables	5
1.3. Idea de eliminación	7
1.4. Eliminación gaussiana	8
2. Matrices	14
2.1. Suma de matrices	15
2.2. Producto por un número (escalar)	17
2.3. Producto de matrices	17
2.4. Matrices diagonales y triangulares	21
2.5. Matriz transpuesta	22
2.6. Matrices inversas	23
2.7. Eliminación de Gauss–Jordan para calcular A^{-1}	25
2.8. Operaciones elementales y matrices elementales (*)	28
A. Cálculos en la computadora (PARI/GP)	33
A.1. Matrices	33
A.2. Solución de ecuaciones lineales	34

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Álgebra lineal estudia las **relaciones lineales**. Estas toman la forma:

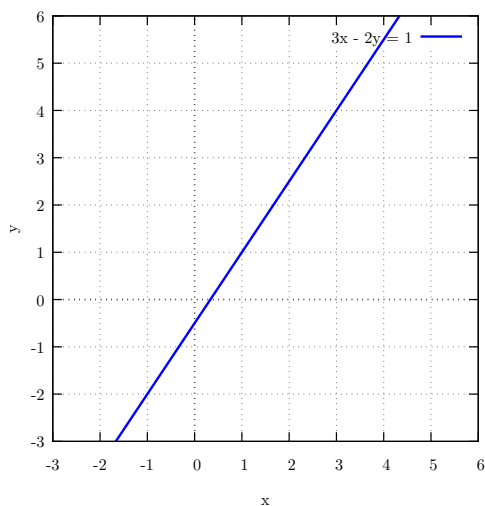
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c,$$

donde $x_1, \dots, x_n$ son variables y $a_1, \dots, a_n, c$ son algunos números. Para que la relación no sea trivial, se excluye el caso en que los coeficientes $a_1, \dots, a_n$ son todos nulos.

El concepto de relaciones lineales viene de la ecuación de una recta en el plano («lineal» de «línea»):

$$ax + by = c.$$

Por ejemplo, la ecuación $3x - 2y = 1$ define la recta dibujada abajo:



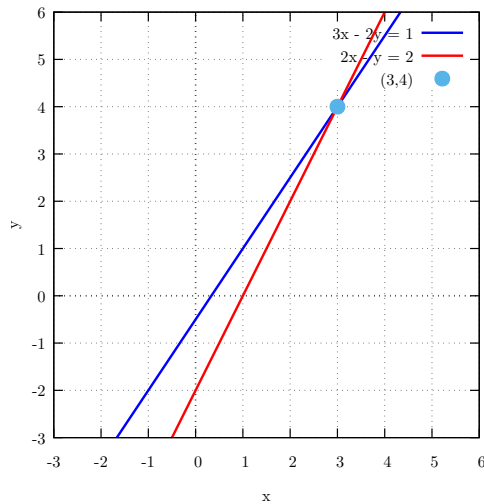
Las relaciones lineales suelen ser las más accesibles, y el álgebra lineal estudia cómo trabajar con ellas. En los problemas de la vida real, las variables normalmente se relacionan de manera más complicada que lineal, pero para hacer los cálculos prácticos, un problema se puede «linearizar», es decir, aproximar por un modelo lineal, porque es mucho más sencillo trabajar con las ecuaciones lineales.

1.1. Ecuaciones lineales en dos variables

Las cosas interesantes empiezan cuando tenemos varias ecuaciones lineales y buscamos su solución común (= solución del sistema de ecuaciones). Por ejemplo, si tomamos otra ecuación lineal:

$$2x - y = 2,$$

esta define otra recta, y su intersección con la anterior es $(x, y) = (3, 4)$.



Esta es la solución del **sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Para dos rectas en el plano, es decir, para un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

existen tres posibilidades:

1. Caso común / normal: las rectas tienen un solo punto de intersección que corresponde a una solución única (x, y) .
2. Las dos ecuaciones en realidad definen la misma recta, y todos los puntos sobre esta son soluciones.
3. Las rectas son paralelas, no tienen intersección; es decir, el sistema de ecuaciones no tiene solución. Se dice también que las ecuaciones son **inconsistentes**.

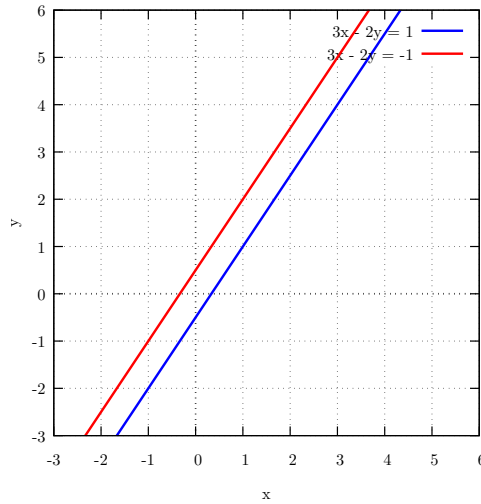
Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

tiene un número infinito de soluciones: la segunda ecuación es equivalente a la primera y define la misma recta. Por otra parte, el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

no tiene soluciones: se ve que las ecuaciones no son compatibles y geométricamente, estas definen rectas paralelas con la misma pendiente $\frac{3}{2}$.



Esta imagen geométrica es útil para tener una intuición de qué está pasando. Para hacer cálculos, analizar y resolver un sistema particular de ecuaciones lineales, necesitamos desarrollar un procedimiento algebraico.

Para un sistema de dos ecuaciones en dos variables, no es difícil describir la solución general.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (*) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (**) \end{cases}$$

Si algún coeficiente a_{ij} es nulo, por ejemplo, $a_{12} = 0$, entonces de (*) podemos expresar $x = -\frac{b_1}{a_{11}}$ (suponiendo $a_{11} \neq 0$), luego sustituir este valor en (**) y encontrar y .

El caso interesante es cuando ninguno de los coeficientes a_{ij} es nulo. Para que nos quede una ecuación con x , primero multiplicamos (*) por a_{22} y (**) por a_{12} :

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones es **equivalente** al sistema inicial; es decir, tiene exactamente las mismas soluciones, bajo nuestra suposición (!) de que $a_{22} \neq 0$ y $a_{12} \neq 0$. Restando las ecuaciones, se cancela el término con y , así nos queda:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Cuando

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

habrá una solución única

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Lo mismo se puede hacer eliminando x : multiplicamos (*) por a_{21} y (**) por a_{11} :

$$\begin{cases} a_{11} a_{21} x + a_{12} a_{21} y = a_{21} b_1 \\ a_{11} a_{21} x + a_{11} a_{22} y = a_{11} b_2 \end{cases}$$

de donde

$$(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) y = a_{21} b_1 - a_{11} b_2,$$

y habrá solución única bajo la misma condición de arriba $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$.

Analizando con cuidado todos los casos, se puede llegar a la siguiente conclusión:

1.1.1 Proposición. *Un sistema de ecuaciones lineales en dos variables*

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y = b_2 \end{cases}$$

tiene una solución única si y solo si

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0.$$

Cuando este número es nulo, el sistema no tiene soluciones o tiene un número infinito de soluciones.

El número de arriba se conoce como el **determinante** del sistema de ecuaciones.

1.1.2 Definición. Para un sistema de dos ecuaciones en dos variables, el **determinante** viene dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Más adelante en el curso vamos a definir los determinantes para ecuaciones en n variables. Las expresiones para x e y con el determinante:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

son casos particulares de la **regla de Cramer**, que también se verá para el caso de n variables.

1.2. Ecuaciones en tres variables

Ahora, si nos movemos al caso de tres variables, las ecuaciones lineales toman la forma

$$ax + by + cz = D$$

para algunos coeficientes a, b, c, D , donde no todos a, b, c son nulos. Esta ecuación define un plano H en el espacio tridimensional. Dos planos H_1 y H_2 , de manera similar a dos rectas en el plano, tienen tres opciones:

- (1) Los planos se intersectan en una recta $H_1 \cap H_2 = L$.
- (2) Los planos coinciden: $H_1 = H_2$.
- (3) Los planos son paralelos y no tienen intersección: $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

Luego, si consideramos el tercer plano H_3 , hay las siguientes opciones:

- (1.1) H_3 intersecta la recta L en un punto.
- (1.2) L pertenece a H_3 .
- (1.3) L es paralela a H_3 .
- (2.x) Opciones similares a las de arriba para $H_1 = H_2$ y H_3 .
- (3) Los planos son paralelos y no tienen intersección.

En general, un sistema de tres ecuaciones en tres variables x, y, z toma forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

para algunos números a_{ij} , b_k . Por lo que acabamos de decir, habrá tres opciones:

- (1) Hay una solución única.
- (2) No hay ninguna solución.
- (3) Hay un número infinito de soluciones que están en un plano o una recta.

En este caso no vamos a tratar de analizar la solución general como lo hicimos para dos variables: esto sería todavía más tedioso y nos daría una fórmula poco útil en la práctica.

En general, una ecuación lineal de la forma

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

donde no todos los a_i son nulos, define un **hiperplano** de dimensión $n - 1$ en el espacio n -dimensional. La intersección de dos hiperplanos, si no es vacía, es un hiperplano de dimensión menor (dos rectas se intersectan en un punto, dos planos se intersectan en una recta, etc.).

1.3. Idea de eliminación

Lo que se puede hacer en cálculos prácticos es eliminar las variables una por una. Veamos un ejemplo particular.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 & (1.1) \\ x + y - z = 2 & (1.2) \\ x - 3y + z = -2 & (1.3) \end{cases}$$

Empezamos por quitar x de las ecuaciones (1.2), (1.3). Para esto nos conviene multiplicar la ecuación (1.1) por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ x + y - z = 2 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

Al multiplicar una ecuación por una constante $c \neq 0$, se obtiene un sistema equivalente (con las mismas soluciones).

Ahora podemos restar la primera ecuación de las otras dos:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 & (1.4) \\ \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 & (1.5) \\ -\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}z = -4 & (1.6) \end{cases}$$

Al sumar o restar una ecuación de otra, las soluciones del sistema tampoco cambian. Así que lo que nos queda es un sistema equivalente, pero más sencillo: x ya no aparece en (1.5) y (1.6).

Ahora podemos eliminar y de (1.6) de la misma manera. Primero multiplicamos (1.5) por $\frac{2}{3}$ para obtener el coeficiente 1 para y :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 & (1.7) \\ y - z = 0 & (1.8) \\ -\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}z = -4 & (1.9) \end{cases}$$

Sumamos (1.9) + (1.8) $\times \frac{5}{2}$:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ y - z = 0 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

Para terminar, multiplicamos la última ecuación por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ y - z = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente al que teníamos al inicio, pero es mucho más fácil de resolver porque basta sustituir los valores paso a paso:

$$\begin{aligned} z &= 2, \\ y &= z = 2, \\ x &= 2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 2. \end{aligned}$$

Este ejemplo fue diseñado para tener soluciones sencillas, pero en general, hay que tener cuidado con las operaciones aritméticas con fracciones para no equivocarse y obtener la respuesta correcta. Para propósitos didácticos, haremos estos cálculos a mano. Los sistemas que aparecen en la vida real suelen tener muchas variables.

Lo que acabamos de hacer se conoce como la **eliminación gaussiana**^{*}:

1. Primero, las variables se eliminan una por una de las ecuaciones de abajo (posiblemente reordenando las ecuaciones), hasta obtener un sistema equivalente de la forma

$$\begin{cases} x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ y + a_{23}z = b_2 \\ z = b_3 \end{cases}$$

2. Luego z, y, x se encuentran con sustitución, en este orden.

1.4. Eliminación gaussiana

En general, un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, \dots, x_n$ tiene la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m-1,1}x_1 + a_{m-1,2}x_2 + \dots + a_{m-1,n}x_n = b_{m-1} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.10)$$

En esta numeración, a_{ij} es el coeficiente de x_j en la i -ésima ecuación.

En lo que sigue vamos a revisar la eliminación gaussiana para el caso general. El procedimiento consiste en manipulaciones aritméticas con los coeficientes a_{ij} y b_k . Nos conviene introducir un objeto especial que empaqueta estos números.

^{*}Carl Friedrich Gauss (1777–1855), matemático alemán.

1.4.1 Definición. La **matriz aumentada** de un sistema de ecuaciones (1.10) es la tabla de números con m filas y $n + 1$ columnas, donde en la i -ésima fila se encuentran los coeficientes de la i -ésima ecuación:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Los números a_{ij} , b_i se conocen como las **entradas** o **elementos** de la matriz. Vamos a conocer las matrices y su significado más adelante, por ahora es solo un recurso computacional.

1.4.2 Proposición. Las siguientes **operaciones elementales** no cambian la solución del sistema:

- 1) $F_i \rightarrow cF_i$: multiplicar (o dividir) una fila por un número $c \neq 0$.
- 2) $F_i \rightarrow F_i + cF_j$: sumar (o restar) un múltiplo de una fila a otra fila.
- 3) $F_i \leftrightarrow F_j$: intercambiar dos filas.

En esta notación, la multiplicación por un número se hace entrada por entrada:

$$cF_i = (ca_{i1}, ca_{i2}, \dots, ca_{in}, cb_i),$$

y la suma también:

$$F_i + F_j = (a_{i1} + a_{j1}, a_{i2} + a_{j2}, \dots, a_{in} + a_{jn}, b_i + b_j).$$

Demostración. La operación 1) no afecta las soluciones porque la ecuación

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

es equivalente a

$$ca_{i1}x_1 + \cdots + ca_{in}x_n = cb_i$$

—aquí c se puede cancelar, puesto que $c \neq 0$.

De manera similar, en 2), las ecuaciones

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$$

son equivalentes a

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + cb_j.$$

En fin, la operación 3) simplemente reordena las ecuaciones. □

La eliminación gaussiana se puede presentar como una aplicación de estas operaciones hasta que la matriz toma la siguiente forma especial.

1.4.3 Definición. Una **matriz escalonada** es una matriz que cumple las siguientes condiciones:

- Todas las filas cuyos elementos son nulos están debajo de las filas que contienen algún elemento distinto de cero.
- En cada fila no nula, el primer elemento distinto de cero aparece a la derecha del primer elemento distinto de cero de la fila anterior.
- Los elementos que están debajo de un primer elemento distinto de cero son iguales a cero.

El primer elemento no nulo en una fila se denomina **pivote** (o también un **elemento principal**).

1.4.4 Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz escalonada; los elementos 2, -3, 3 son los pivotes.

Los pivotes forman una especie de escalera, de ahí el nombre «matriz escalonada».

Notamos que dividiendo cada fila por su primer elemento no nulo, siempre podemos suponer que los pivotes son iguales a 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No es realmente necesario para resolver el sistema de ecuaciones, pero esto simplificará algunos cálculos, y nos servirá más adelante en §2.7 para definir una variación de la eliminación gaussiana. Esta matriz con pivotes iguales a 1 se conoce como **escalonada reducida**.

1.4.5 Ejemplo. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - y + 3z = 7 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$

Su matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right).$$

Ahora las operaciones elementales nos dan

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{2}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - \frac{1}{2}F_2} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow \frac{3}{8}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Así llegamos al sistema equivalente

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{5}{2} \\ y - \frac{7}{3}z = -3 \\ z = 3 \end{cases}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 z &= 3, \\
 y - \frac{7}{3}z &= -3, \\
 x &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2.
 \end{aligned}$$

1.4.6 Ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 3y + z = 4 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Escribamos la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

No podemos usar la primera fila para la eliminación; vamos a empezar por el intercambio de

filas $F_1 \leftrightarrow F_2$. Las operaciones elementales nos llevan a

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{3}F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 3F_1} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow \frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema que nos queda no tiene soluciones porque la última fila corresponde a la ecuación $0 = 1$.

1.4.7 Ejemplo. Ahora consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 10 \\ x + 2y - z = 8 \\ x - 8y + 7z = -4 \end{cases}$$

que corresponde a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -8 & 7 & -4 \end{array} \right).$$

La reducción nos da

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -8 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 10 \\ 1 & -8 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{matrix}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -6 \\ 0 & -10 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & -10 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 10F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí en el último paso se canceló todo, y la última fila corresponde a la ecuación trivial: $0x + 0y + 0z = 0$ para cualesquiera x, y, z . El sistema que nos queda es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ y - \frac{4}{5}z = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Hay un número infinito de soluciones: para cualquier elección de z , la segunda ecuación nos dará un valor de y , y sustituyéndolo en la primera ecuación, se obtiene x .

No es muy difícil convencernos de que las operaciones elementales siempre nos llevan a una matriz escalonada, y revisando qué significa esta matriz en términos de ecuaciones lineales, llegamos a la siguiente conclusión.

1.4.8 Proposición (Eliminación gaussiana). *Usando las operaciones elementales, la matriz aumentada*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

siempre se puede reducir a una matriz escalonada. También se puede suponer que en esta matriz cada pivote (el primer coeficiente no nulo en una fila) es igual a 1.

1) *Si la matriz escalonada contiene una fila de la forma*

$$(0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ | \ c)$$

con $c \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones no tiene soluciones. Esto corresponde a una contradicción $0 = c$.

2) *Si cada pivote corresponde a una variable, entonces hay una solución única. Para esto el número de ecuaciones (después de eliminar las ecuaciones dependientes) debe ser igual al número de variables.*

3) *Si no aparece contradicción como en 1) y hay una variable que no corresponde a un pivote, entonces hay un número infinito de soluciones.*

1.4.9 Ejemplo. Para un sistema de 3 ecuaciones en 3 variables, si la eliminación nos da

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \end{array} \right),$$

donde $\bullet \neq 0$ y $*$ es cualquier número, entonces hay una solución única.

Si tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{array} \right),$$

entonces no hay soluciones. Por otra parte, si tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{o} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

entonces hay un número infinito de soluciones.

1.4.10 Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si en la parte derecha se tiene $b_i = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m-1,1}x_1 + a_{m-1,2}x_2 + \cdots + a_{m-1,n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

1.4.11 Proposición. Para un sistema homogéneo hay dos opciones:

- 1) la única solución es la **solución trivial** $x_1 = \cdots = x_n = 0$;
- 2) hay un número infinito de soluciones.

Si el número de ecuaciones es menor que el número de variables, siempre habrá un número infinito de soluciones.

Esto se sigue de la eliminación. En este caso, en la parte derecha de la matriz aumentada siempre están ceros, así que no puede salir una contradicción.

2. Matrices

2.0.1 Definición. Una **matriz** A de $m \times n$ es una tabla de números^{*} con m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Se dice que $m \times n$ es el **tamaño** de A .

En la numeración a_{ij} , el índice $i = 1, \dots, m$ es el número de fila y el índice $j = 1, \dots, n$ es el número de columna. Los números a_{ij} se llaman **elementos** o **entradas** de la matriz. También se escribe de forma más breve $A = (a_{ij})$ en lugar de (2.1).

2.0.2 Definición. Si $m = n$, entonces se dice que la matriz es **cuadrada** de tamaño $n \times n$.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se consideran iguales y se escribe $A = B$ si:

- 1) son del mismo tamaño $m \times n$,
- 2) sus entradas en las posiciones correspondientes son iguales: $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

^{*}En este curso los «números» siempre serán los números reales o los números complejos.

2.0.3 Ejemplo. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3 y $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×2 .

2.0.4 Ejemplo. $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ son matrices cuadradas de 2×2 y 3×3 respectivamente.

2.0.5 Ejemplo. Una sola fila $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$ es una matriz de $1 \times n$.

2.0.6 Ejemplo. Una sola columna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

es una matriz de $m \times 1$.

Ya vimos las matrices cuando hicimos cálculos con la eliminación gaussiana, ahora vamos a definir operaciones aritméticas con matrices: sumas y productos.

2.1. Suma de matrices

Las matrices se suman «elemento por elemento» en las posiciones correspondientes.

2.1.1 Definición. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices del mismo tamaño $m \times n$, entonces su **suma** $A + B$ es la matriz de $m \times n$ definida por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Cuando A y B tienen diferente tamaño, su suma no está definida.

2.1.2 Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Conviene definir la matriz que tiene ceros en todas sus entradas.

2.1.3 Definición. La **matriz nula** de $m \times n$ es la matriz que tiene $a_{ij} = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Esta se denotará por O :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

También conviene definir, para una matriz A , la matriz cuyas entradas tienen el signo opuesto.

2.1.4 Definición. Para una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$, la **matriz opuesta** $-A$ se define como

$$-A = (-a_{ij}) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.1.5 Ejemplo.

$$-\begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -7 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Escribiremos $A - B$ en lugar de $A + (-B)$.

2.1.6 Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -6 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 \\ -7 & -2 & 6 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Veamos las propiedades de la suma de matrices.

2.1.7 Observación. Si A, B, C son matrices de $m \times n$, entonces

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + (-A) = (-A) + A = O$;
- 3) $A + O = O + A = A$;
- 4) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Demostración. La suma $A + B$ está definida por sumas de elementos correspondientes $a_{ij} + b_{ij}$, así que estas propiedades son consecuencia de las propiedades conocidas de la suma de números:

- 1) significa que $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$;
- 2) significa que $a_{ij} - a_{ij} = 0$;
- 3) significa que $a_{ij} + 0 = a_{ij}$;
- 4) significa que $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. □

2.2. Producto por un número (escalar)

Una matriz puede ser multiplicada por un número; esto se define como el producto de cada entrada por ese número.

2.2.1 Definición. Para una matriz $A = (a_{ij})$ y un número α , el **producto por α** se define como

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Para subrayar que α no es una matriz, sino un solo número, se dice que α es un **escalar**.

2.2.2 Ejemplo.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}.$$

Notamos que $-A$ es lo mismo que $(-1) \cdot A$.

Anotemos las propiedades de esta operación.

2.2.3 Observación. Si A, B son matrices de $m \times n$, y α, β son números (escalares), se tiene

1) $1 \cdot A = A$;

2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Demostración. Para las entradas de matrices,

$$1 \cdot a_{ij} = a_{ij};$$

$$\alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij};$$

$$(\alpha + \beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij}.$$

□

2.3. Producto de matrices

El producto de matrices es más interesante que la suma; este no se define «elemento por elemento». Ahora vamos a dar la definición y ver sus propiedades básicas, más adelante en el curso veremos de dónde vienen las fórmulas y cuál es el verdadero significado del producto.

2.3.1 Definición. Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y $B = (b_{jk})$ una matriz de $n \times p$. El **producto** AB es una matriz de $m \times p$ definida por

$$AB = (c_{ik}), \quad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}, \quad (2.2)$$

para $i = 1, \dots, m$ y $k = 1, \dots, p$.

Para que el producto AB tenga sentido, A debe tener el mismo número de columnas n que el número de filas de B . En el caso contrario, el producto AB no está definido. Notamos que, si A y B son dos matrices cuadradas de $n \times n$, entonces su producto AB está definido, y es también una matriz cuadrada de $n \times n$.

En la fórmula (2.2), los números $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ recorren la i -ésima fila de A , mientras que los números $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}$ recorren la k -ésima columna de B :

$$c_{ik} = (i\text{-ésima fila de } A) \times (k\text{-ésima columna de } B) =$$

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

2.3.2 Ejemplo. Calculamos

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Según la definición, esta es una matriz de 2×2 :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$c_{11} = (-1 \quad 8 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = 35,$$

$$c_{12} = (-1 \quad 8 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-4) + 8 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 10,$$

$$c_{21} = (3 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) = 8,$$

$$c_{22} = (3 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = -12.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 10 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

2.3.3 Ejemplo. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 & -1 \\ -7 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, la entrada c_{11} viene de

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 0.$$

La entrada c_{12} viene de

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 6.$$

Dejo al lector comprobar el resto de los cálculos.

2.3.4 Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

2.3.5 Advertencia. Cuando A y B son matrices cuadradas de $n \times n$, ambos productos AB y BA están definidos, pero normalmente $AB \neq BA$. Para dar un ejemplo sencillo,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para ver las propiedades del producto de matrices, nos conviene la notación sumatoria:

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Con esta notación, tenemos:

- $c \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = \sum_{1 \leq i \leq n} cx_i$;
- $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \pm \sum_{1 \leq i \leq n} y_i = \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i \pm y_i)$;
- $\sum_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} x_{ij} \right) = \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{1 \leq i \leq m} x_{ij} \right).$

Podemos reescribir la fórmula de producto de matrices (2.2) como

$$c_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} b_{jk}.$$

2.3.6 Proposición (Asociatividad). Sean A, B, C tres matrices tales que los productos AB y BC están definidos. Entonces, se cumple

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demostración. Para que los productos tengan sentido,

- $A = (a_{ij})$ debe ser de $m \times n$,
- $B = (b_{jk})$ debe ser de $n \times p$,
- $C = (c_{k\ell})$ debe ser de $p \times q$

para algunos m, n, p, q .

Ahora $X = (x_{ik}) = AB$ es una matriz de $m \times p$ con entradas

$$x_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} b_{jk},$$

y entonces $(AB)C = XC$ es una matriz de $m \times q$ con entradas

$$\sum_{1 \leq k \leq p} x_{ik} c_{k\ell} = \sum_{1 \leq k \leq p} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{k\ell} = \sum_{1 \leq k \leq p} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell}. \quad (2.3)$$

$Y = BC$ es una matriz de $n \times q$ con entradas

$$y_{j\ell} = \sum_{1 \leq k \leq p} b_{jk} c_{k\ell},$$

y entonces $A(BC) = AY$ es una matriz de $m \times q$ que tiene entradas

$$\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} y_{j\ell} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \left(\sum_{1 \leq k \leq p} b_{jk} c_{k\ell} \right) = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq p} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell}. \quad (2.4)$$

Las sumas se pueden intercambiar, así que la expresión (2.3) para las entradas de $(AB)C$ coincide con la expresión (2.4) para las entradas de $A(BC)$. $\square$

Como consecuencia de $A(BC) = (AB)C$, si tenemos un producto de n matrices $A_1 A_2 \cdots A_n$, no importa cómo se agrupan las multiplicaciones. Por ejemplo, para 4 matrices, habrá 5 maneras de hacer la multiplicación $ABCD$:

$$\begin{array}{ccc} & ((AB)C)D & \\ \swarrow & & \searrow \\ (AB)(CD) & & (A(BC))D \\ \parallel & & \parallel \\ A(B(CD)) & \text{=====} & A((BC)D) \end{array}$$

Aquí cada «=» es una aplicación de la propiedad 2.3.6, así que las 5 expresiones son iguales.

2.3.7 Proposición (Distributividad). *Para matrices A, B, C se tiene*

$$1) A(B + C) = AB + AC,$$

$$2) (A + B)C = AC + BC,$$

suponiendo que los productos están definidos.

La demostración es más fácil que la de 2.3.6 y se deja al lector como un ejercicio.

Resumiendo lo que hemos visto, las operaciones de suma y producto de matrices, y de producto por un escalar, cumplen con las propiedades esperadas; la única diferencia importante con las operaciones aritméticas habituales es que $AB \neq BA$.

2.4. Matrices diagonales y triangulares

2.4.1 Definición. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de $n \times n$. Su **diagonal** consiste en las entradas a_{ii} para $i = 1, \dots, n$.

Para una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice que es **diagonal** si A tiene ceros fuera de la diagonal: $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Una matriz diagonal tiene forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

Aquí nos conviene no escribir los ceros.

2.4.2 Observación. *Para dos matrices diagonales de $n \times n$ el producto se calcula entrada por entrada:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

En particular, el producto de matrices diagonales es también diagonal.

Demostración. En la fórmula del producto $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$ los únicos términos no nulos salen cuando $i = j = k$, así que nos quedan $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$. $\square$

2.4.3 Definición. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de $n \times n$. Se dice que es **triangular superior** si abajo de su diagonal están ceros: $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Una matriz triangular superior tiene forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aquí nos conviene no escribir los ceros.

De la misma manera, una matriz **triangular inferior** es la que tiene ceros arriba de su diagonal: $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

2.4.4 Observación. Si A y B son triangulares superiores (resp. inferiores), entonces AB es también triangular superior (resp. inferior).

2.4.5 Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Supongamos que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{jk})$ son triangulares superiores, es decir, $a_{ij} = 0$ para $i > j$ y $b_{jk} = 0$ para $j > k$. El producto AB tiene entradas

$$c_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} b_{jk}.$$

Quitando los términos nulos, se quedan los $a_{ij} b_{jk}$ con $i \leq j \leq k$, así que c_{ik} puede ser no nulo solo cuando $i \leq k$.

Para las triangulares inferiores el argumento es similar. □

2.5. Matriz transpuesta

2.5.1 Definición. Para una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$, la **matriz transpuesta** correspondiente $A^t = (a_{ji})$ es la matriz de $n \times m$ que se obtiene intercambiando filas y columnas.

2.5.2 Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

2.5.3 Observación. Para dos matrices A y B , si el producto AB está definido, entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Demostración. Si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$, entonces A^t es de $n \times m$ y B^t es de $p \times n$. Así el producto $B^t A^t$ está definido y tiene tamaño $p \times m$. Esto explica por qué el orden de las matrices se intercambia.

Las entradas de AB son

$$c_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} b_{jk}.$$

Para obtener las entradas de $(AB)^t$, hay que intercambiar los índices i y k :

$$c_{ki} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{kj} b_{ji} = \sum_{1 \leq j \leq n} b_{ji} a_{kj}.$$

Estas son las entradas de $B^t A^t$. □

2.6. Matrices inversas

Para la suma de matrices definimos la matriz nula O que funciona como 0 respecto a la adición: tenemos $A + O = O + A = A$. Ahora queremos definir una matriz que se comporta como 1 respecto al producto, y las matrices inversas que funcionan como $\frac{1}{\alpha} \alpha = \alpha \frac{1}{\alpha} = 1$.

2.6.1 Definición. La **matriz identidad** de $n \times n$ es la matriz $I = (a_{ij})$ que tiene

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, la matriz identidad tiene 1's en la diagonal y 0's fuera de la diagonal.

2.6.2 Ejemplo. Las matrices identidad de 2×2 y de 3×3 serían

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

El significado de la matriz identidad es la siguiente propiedad.

2.6.3 Observación. Para cualquier matriz A de $m \times n$ se tiene

- 1) $IA = A$, donde I es la matriz identidad de $m \times m$;
- 2) $AI = A$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

Demostración. Para 1), tenemos $IA = (c_{ik})$, donde

$$c_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq m} b_{ij} a_{jk},$$

y $b_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $b_{ii} = 1$, así que nos queda $c_{ik} = a_{ik}$. La parte 2) es similar. □

2.6.4 Definición. Para una matriz cuadrada A de $n \times n$ se dice que es **invertible** si existe otra matriz A^{-1} de $n \times n$ tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

En este caso A^{-1} se llama la **matriz inversa**.

2.6.5 Ejemplo. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Para comprobarlo, calculamos

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.6 Ejemplo. Para las matrices diagonales, suponiendo que los números en la diagonal no son nulos, tenemos

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

—esto viene de la fórmula de producto para matrices diagonales [2.4.2](#).

2.6.7 Observación. Si A^{-1} existe, entonces es única.

Demostración. Supongamos que las matrices B y C ambas funcionan como inversas. En particular, $BA = I$, $AC = I$. Entonces,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \quad \square$$

2.6.8 Nota. Aquí probamos un poco más: si para A existe una matriz B que es **inversa por la izquierda** tal que $BA = I$, y también una matriz C que es **inversa por la derecha** tal que $AC = I$, entonces $B = C = A^{-1}$ es la inversa. Más adelante veremos que si existe una inversa por la izquierda, esta es automáticamente inversa por la derecha, y viceversa, una inversa por la derecha es automáticamente inversa por la izquierda. No es algo obvio, esto se verá en [§2.8](#).

2.6.9 Observación. Si A y B son matrices invertibles, entonces el producto AB es también invertible y se tiene

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Un ejemplo de la vida cotidiana: primero se ponen los calcetines y después los zapatos. Para quitárselos, primero se quitan los zapatos y después los calcetines. Lo mismo ocurre con las operaciones matemáticas: si $AB \neq BA$, entonces la inversa de AB debe ser $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Demostración. Calculamos

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

De manera similar,

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \quad \square$$

La misma idea se aplica al producto de n matrices:

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

2.6.10 Observación. Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que $x_1 = \cdots = x_n = 0$. En palabras: una matriz invertible multiplicada por una columna no nula no puede producir una columna nula.

Demostración. Si A es invertible, multiplicando ambas partes por A^{-1} por la izquierda, se obtiene

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí $A^{-1} A = I$ es la matriz identidad, y el producto en la parte derecha es la columna nula, así que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.7. Eliminación de Gauss–Jordan para calcular A^{-1}

Para calcular la matriz inversa A^{-1} , o concluir que esta no existe, la idea es considerar las entradas de A^{-1} como incógnitas y resolver $AA^{-1} = I$. Esta ecuación con matrices corresponde a n^2 ecuaciones lineales con n^2 incógnitas, pero hay una manera sencilla de resolverlas simultáneamente con eliminación.

Recordemos que en la eliminación gaussiana se usaban las siguientes tres **operaciones elementales** (1.4.2):

- 1) $F_i \rightarrow cF_i$: multiplicar la fila i por $c \neq 0$,
- 2) $F_i \rightarrow F_i + cF_j$: sumar a la fila i un múltiplo de la fila j , donde $i \neq j$,
- 3) $F_i \leftrightarrow F_j$: intercambiar la fila i con la fila j .

El siguiente procedimiento se conoce como la **eliminación de Gauss–Jordan**^{*}.

^{*}Wilhelm Jordan (1842–1899), geodesta alemán, conocido en matemáticas principalmente por su algoritmo de eliminación.

1. Dada una matriz A de $n \times n$, escribimos la matriz aumentada de tamaño $n \times 2n$ con la matriz A a la izquierda y la matriz identidad I a la derecha:

$$(A | I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \quad (2.5)$$

2. Aplicando las operaciones elementales a esta matriz, primero procedemos como en la eliminación gaussiana y reducimos la matriz de la izquierda a la forma escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & * & \cdots & * & & & \\ & 1 & * & \cdots & * & & & \\ & & 1 & \cdots & * & & & \\ & & & \ddots & * & & & \\ & & & & 1 & & & \end{array} \right).$$

Mientras se realizan estas operaciones, la parte derecha de la matriz aumentada (2.5) se modifica también.

Si esto no es posible y aparece algún cero en la diagonal, podemos concluir que A no es invertible.

3. Luego, aplicando las operaciones elementales, eliminamos las entradas arriba de la diagonal hasta obtener la matriz identidad

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & \ddots & 0 & & & \\ & & & & 1 & & & \end{array} \right).$$

4. Lo que queda en la parte derecha de la matriz aumentada es la matriz inversa A^{-1} .

En la eliminación gaussiana, la matriz aumentada tenía una columna a la derecha que contenía los lados derechos de las ecuaciones, y aquí la matriz aumentada (2.5) tiene n columnas a la derecha, lo cual corresponde a n sistemas de n ecuaciones cada uno.

Veamos algunos ejemplos concretos.

2.7.1 Ejemplo. Para calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

primero escribimos la matriz aumentada $(A | I)$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ahora, la eliminación nos da como resultado

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{4} F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1} \\ & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 4F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + \frac{5}{4} F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que esta matriz es la inversa:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.7.2 Ejemplo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la inversa, usamos la siguiente eliminación para la matriz aumentada $(A | I)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{5} F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 3F_1}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{43}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{43}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow -5F_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{43}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + \frac{43}{5} F_3 \\ F_1 \rightarrow F_1 + \frac{6}{5} F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 35 & -43 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Así,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 35 & -43 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se deja al lector la comprobación de que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

2.7.3 Ejemplo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La eliminación aplicada a la matriz aumentada $(A | I)$ nos da:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{4} F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + 4 F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3 F_1}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow \frac{1}{2} F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + \frac{3}{4} F_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

En este punto termina el algoritmo y concluimos que A no es invertible.

La justificación de por qué este algoritmo produce A^{-1} si y solo si A es invertible, se encuentra en la siguiente sección (opcional).

2.8. Operaciones elementales y matrices elementales (*)

Aquí vamos a justificar el algoritmo de Gauss–Jordan.

2.8.1 Proposición (Matrices elementales). *Cada una de las tres operaciones elementales aplicadas a una matriz A corresponde a la multiplicación EA por la **matriz elemental** E correspondiente.*

1) $F_i \rightarrow cF_i$: matriz diagonal donde en la diagonal están 1, excepto la entrada (i, i) , que es c :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $F_i \rightarrow F_i + cF_j$: matriz identidad, que además tiene c en la posición (i, j) , con $i \neq j$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & c \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $e_{k\ell} = 0$, salvo $e_{kk} = 1$ y $e_{ij} = c$.

3) $F_i \leftrightarrow F_j$: matriz identidad con las filas i, j intercambiadas. Por ejemplo, para $n = 3$, las matrices elementales correspondientes a las operaciones $F_1 \leftrightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_3, F_2 \leftrightarrow F_3$ son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se deja al lector comprobar esta afirmación; veamos cómo funciona esto en un ejemplo particular.

2.8.2 Ejemplo. Consideremos una matriz de 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Multiplicar la fila 2 por c corresponde al producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La operación $F_2 \rightarrow F_2 + cF_1$ corresponde al producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} & a_{23} + ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

El intercambio de filas $F_1 \leftrightarrow F_2$ corresponde al producto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2.8.3 Observación. Las matrices elementales son invertibles.

Demostración. Para 1) la inversa es la matriz similar con $\frac{1}{c}$ en la posición (i, i) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{c} & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Para 2) la inversa es la matriz similar, pero con $-c$ en la posición (i, j) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & -c & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Para 3) la inversa es la misma matriz. □

Entonces, la eliminación de Gauss–Jordan puede ser vista como multiplicación por la izquierda por matrices elementales $E_1, E_2, \dots, E_n$ a las matrices A e I . En la matriz aumentada $(A \mid I)$ a la izquierda queda

$$E_n \cdots E_1 A = I, \quad (2.6)$$

y a la derecha queda

$$E_n \cdots E_1 I = E_n \cdots E_1.$$

La ecuación (2.6) significa que el producto de matrices elementales es una inversa por la izquierda de A . El algoritmo aplicado a la matriz aumentada calcula este producto paso a paso.

2.8.4 Ejemplo. Regresando al ejemplo 2.7.1, para $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, los pasos de eliminación eran

$$1) F_1 \rightarrow \frac{1}{4} F_1, \quad 2) F_2 \rightarrow F_2 + 3 F_1, \quad 3) F_2 \rightarrow 4 F_2, \quad 4) F_1 \rightarrow F_1 + \frac{5}{4} F_2.$$

Las matrices elementales correspondientes son

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto

$$E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esta es la matriz A^{-1} .

Por otra parte, la eliminación de Gauss–Jordan sobre la matriz aumentada $(A \mid I)$ resuelve simultáneamente n sistemas de ecuaciones que, en forma matricial, son

$$A \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

donde

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora (2.7) significa que

$$A \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I,$$

así que el algoritmo obtiene una inversa por la derecha.

En conclusión, Gauss–Jordan obtiene dos matrices B y C tales que $BA = I$ y $AC = I$, así que $B = C$ por 2.6.7 y 2.6.8, y esta es la matriz inversa A^{-1} .

El algoritmo produce A^{-1} si en la eliminación no aparece una fila nula $(0, \dots, 0)$. Viceversa, se puede ver que cuando la eliminación produce una fila nula, la matriz no es invertible. Supongamos que en algún momento aparece una fila nula. Tenemos

$$C = E_n \cdots E_1 A = (\text{matriz con } i\text{-ésima fila nula}) = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Las matrices elementales E_i son invertibles, y si A es invertible, entonces C es invertible. Ahora

$$(0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0) C = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0) \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, \dots, 0).$$

Multiplicando esta igualdad por C^{-1} por la derecha, tenemos

$$(0, \dots, 1, \dots, 0) \underbrace{C C^{-1}}_I = \underbrace{(0, \dots, 0, \dots, 0)}_{(0, \dots, 0, \dots, 0)} C^{-1}.$$

Esto nos lleva a una contradicción: en la parte izquierda está la fila $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, pero en la parte derecha está $(0, \dots, 0, \dots, 0)$. Por tanto, C no es invertible y A tampoco es invertible.

Esto concluye la justificación del algoritmo de Gauss–Jordan: este produce A^{-1} si y solo si A es invertible. $\square$

Anotemos una consecuencia de Gauss–Jordan en términos de matrices elementales:

2.8.5 Proposición. *Una matriz A es invertible si y solo si es un producto de matrices elementales:*
 $A = E_1 E_2 \cdots E_n$.

A. Cálculos en la computadora (PARI/GP)

Hay muchas opciones para realizar cálculos prácticos de álgebra lineal en la computadora. El sistema MATLAB es muy popular, que también tiene un análogo gratuito, **Octave**^{*}. Este software se centra en cálculos con coma flotante (por ejemplo, $\frac{1}{3}$ se convierte en 0,3333). Para los fines didácticos de este curso, nos conviene usar otras herramientas que realizan cálculos con números racionales. Aquí veremos cómo se usa el programa **PARI/GP**^{**} para trabajar con ecuaciones lineales y matrices.

A.1. Matrices

Para especificar una matriz, sus entradas se escriben entre corchetes. Los elementos de una misma fila se separan por comas y las filas se separan por punto y coma:

```
? A = [1, 2, 3; 4, 5, 6]
% =
[1 2 3]
[4 5 6]
```

El producto de matrices se calcula con $A*B$; de manera similar, el producto por un número (escalar) es $c*A$. La matriz inversa se calcula con A^{-1} , y, en general, A^n es la n -ésima potencia para $n \in \mathbb{Z}$.

```
? A = [1, 2; 3, 4]
% =
[1 2]
[3 4]

? B = [0, 1; 1, 0]
% =
[0 1]
[1 0]

? A * B
% =
[2 1]
[4 3]
```

^{*}<https://octave.org/>

^{**}<https://pari.math.u-bordeaux.fr/>

```
? B * A
% =
[3 4]
[1 2]

? A^-1
% =
[ -2    1]
[3/2 -1/2]

? B^2
% =
[1 0]
[0 1]
```

Al tratar de invertir una matriz no invertible aparece un error:

```
? A = [0, 0; 0, 0]
% =
[0 0]
[0 0]

? A^-1
*** at top-level: A^-1
***      ^---
*** _^_: impossible inverse in ginv: [0, 0; 0, 0].
```

A.2. Solución de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se usa la función `matsolve(A, b)`. Aquí A es la matriz de coeficientes y b es la columna que representa el lado derecho del sistema.

```
? A = [2, -1, 1; 1, 1, -1; 1, -3, 1]
% =
[2 -1 1]
[1 1 -1]
[1 -3 1]
```

```
? b = [4; 2; -2]
% =
[ 4]
[ 2]
[-2]

? matsolve(A, b)
% =
[2]
[2]
[2]
```

Esto también funciona con variables en lugar de valores numéricos:

```
? matsolve([a, b; c, d], [b_1; b_2])
% =
[(-b_2*b + b_1*d)/(d*a - c*b)]
[ (b_2*a - b_1*c)/(d*a - c*b)]
```

Cuando la matriz de coeficientes no es invertible, `matsolve` produce un error:

```
? A = [0, 3, 1; 3, 2, -1; -3, 1, 2]
% =
[ 0 3  1]
[ 3 2 -1]
[-3 1  2]

? b = [4; 4; 1]
% =
[4]
[4]
[1]

? matsolve(A, b)
*** at top-level: matsolve(A,b)
***      ^-----
*** matsolve: impossible inverse in gauss: [0, 3, 1; 3, 2, -1; -3, 1, 2].
```